

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.И. ВЕРНАДСКОГО

На правах рукописи

Корнута Анжелика Александровна

Анализ структур нелинейного уравнения параболического типа
с преобразованием пространственных переменных

Специальность 1.1.2 Дифференциальные уравнения и математическая
физика

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Лукьяненко В. А.

Симферополь — 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. Начально-краевые задачи для нелинейного уравнения параболического типа с преобразованием аргументов . . .	13
1.1. Обзор основных результатов и методов	13
1.2. Общая постановка задач для уравнений с преобразованием переменных	21
1.3. Частные случаи решений	25
Выводы к главе 1	29
ГЛАВА 2. Задача на кольце с операторами поворота и радиального сжатия	31
2.1. Линейная задача для кольца	32
2.2. Интегральное представление	33
2.3. Анализ структур нелинейных уравнений для кольца	35
2.3.1 Бифуркация стационарных решений для кольца, асимптотическое представление	35
2.3.2 Галеркинские аппроксимации неоднородных в пространстве стационарных решений для кольца	40
2.4. Бифуркация вращающихся структур в уравнении на кольце с операторами поворота и сжатия	43
2.5. Двухмодовая аппроксимация вращающихся структур в уравнении на кольце с оператором инволюции	48
Выводы к главе 2	49
ГЛАВА 3. Структуры решений с оператором поворота на круге и окружности	52
3.1. Анализ структур нелинейных уравнений для круга	52

3.1.1	Бифуркация неоднородного в пространстве стационарного решения для круга, асимптотическое представление	52
3.1.2	Галеркинские аппроксимации неоднородных в пространстве структур	55
3.1.3	Периодические по времени решения начально-краевой задачи на круговой области с оператором инволюции	57
3.2.	Сценарии поведения решений нелинейных уравнений с оператором поворота на окружности	61
3.2.1	Бифуркация неоднородного в пространстве стационарного решения для окружности, асимптотическое представление	62
3.2.2	Галеркинские аппроксимации неоднородных в простран- стве структур на окружности	67
3.2.3	Метаустойчивые структуры задачи на окружности	72
	Выводы к главе 3	77
ГЛАВА 4.	Структура решения для уравнения с оператором отражения на прямоугольной области	80
4.1.	Задача для уравнений с оператором отражения аргумента на бесконечной полосе	80
4.1.1	Сведение к нелинейному интегральному уравнению	82
4.1.2	Частный случай представления в виде интегрального уравнения	86
4.1.3	Дискретный случай задачи	89
4.2.	Задача для уравнений с оператором отражения аргумента с условием периодичности на прямоугольнике	93

4.2.1	Спектральная задача	95
4.2.2	Метод центральных многообразий	101
4.3.	Частный случай задачи для уравнений с оператором отражения аргументов на квадрате	107
4.4.	Структуры Галеркина на прямоугольнике	108
	Выводы к главе 4	114
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	115
	СПИСОК ИСТОЧНИКОВ	117
	СПИСОК ИЛЛЮСТРАЦИЙ	139
	Приложение А	140

ВВЕДЕНИЕ

Математическое описание сложных процессов различной природы реализуется с помощью нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений в частных производных, функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), а также нелинейных интегральных уравнений. Как раздел математики сформировалась и бурно развивается прикладная нелинейная динамика (ПНД) с широкими междисциплинарными связями. В рамках ПНД исследуется поведение решений нелинейных уравнений с параметрами. Рассматриваются вопросы устойчивости, бифуркации решений, возникновения неоднородных в пространстве структур, квазипериодических решений и др. При этом используются различные теории, методы и алгоритмы.

Именно модели нелинейной оптики позволяют наблюдать богатый набор систем, обладающих свойством самоорганизации, управление которыми происходит путем воздействия на внутренние параметры системы и может быть реализовано в реальных экспериментах в виде широкого спектра изменений светового поля. Одной из таких систем является оптическое устройство, которое представляет собой некоторый специально устроенный внешний контур, называемый "контуром обратной двумерной связи" [89], состоящий из различных оптических устройств (линз, призм и др.) и тонкого слоя нелинейной среды.

Эксперименты М. А. Воронцова, В. Ю. Иванова, А. В. Ларичева [138] показали, что воздействие внешнего контура обратной связи, которое выполняется входящими в его состав оптическими устройствами, приводит к существенному видоизменению нелинейной динамики системы. Генерация сложных пространственно-временных структур светового поля (автоволн, стационарных и движущихся структур, оптических вихрей и др.) может быть получена как результат использования достаточно простых преобразований: поворота, сжатия, отражения пространственных аргументов.

Возобновление интереса к данным оптическим системам вызвано воз-

возможностью использования оптических эффектов в информационных технологиях, прежде всего с точки зрения создания устройств для обработки больших данных. В последнее время особый интерес вызывают оптические вихри (винтовые дислокации волнового фронта), которые возникают, в частности, в турбулентной атмосфере, через которую распространяется пучок лазерного излучения. Поэтому анализ математических моделей, описывающих динамику нелинейных оптических систем, которые обладают возможностью управления преобразованием пространственных аргументов с помощью устройств в контуре обратной связи, является актуальным и с теоретической, и с практической точек зрения.

В зависимости от того, как реализуется воздействие контура обратной связи, динамика оптической системы может быть описана либо обыкновенным дифференциальным уравнением, либо параболическим ФДУ с преобразованием пространственных переменных искомой функции [112, 137], которое может сопровождаться запаздыванием в системе [117, 120, 133]. В этом случае управляемое изменение (фазовая модуляция) световой волны $u(x, t)$, которая в пределах области $S \subset R^2$ проходит через тонкий слой нелинейной среды керровского типа, представляется математической моделью

$$\tau_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \Delta u(x, t) - u(x, t) + K(1 + \gamma \cos Qu(x, t)), \quad (0.1)$$

где $x \in S$, $t \geq 0$. Уравнение (0.1) дополняется краевыми условиями на границе области S и начальными условиями. Здесь Δ — оператор Лапласа, $D > 0$ — коэффициент диффузии, $K > 0$ — коэффициент, пропорциональный интенсивности входного светового поля, $\gamma \in (0, 1)$ — коэффициент «обратной связи» [90, 112], $Qu(x, t) = u(q(x), t)$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственной переменной (например, отражение, поворот).

В диссертационной работе проводится бифуркационный анализ ФДУ параболического типа (0.1) без запаздывания при $\tau_1 = 1$ в замкнутой области S для случая круговой области (круг, кольцо, окружность (тонкое кольцо)), бесконечной полосы и прямоугольной области, где в качестве преобразования Q пространственных переменных искомой функции $u(x, t)$ выбраны поворот

на некоторый угол, радиальное сжатие или отражение с условием периодичности и с краевыми условиями второго рода и косой производной на границе ∂S для полосы и прямоугольника.

Исследования ФДУ имеет большую историю, начиная с работ А. Д. Мышкиса [69], Р. Беллмана, К. Кука [22], классической работы Дж. Хейла [121], цикла работ А. Л. Скубачевского и его учеников [97–101, 135], Е. М. Варфоломеева [27, 28], Л. Е. Россовского [92, 93], А. Б. Муравника [79, 80], С. А. Кащенко [40, 122], А. В. Разгулина и его учеников [83–89, 134], А. Н. Куликова, Д. А. Куликова [66, 67, 94], Е. П. Белана и его учеников [4–6, 8–10, 17–21, 45], О.Б. Лыковой [14, 15], и др.

Целью данной работы является выявление и описание условий, приводящих к появлению в начально-краевой задаче для ФДУ (0.1) новых структур; построение неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений; нахождение их асимптотических представлений с использованием метода центральных многообразий и согласованного с ним метода Галеркина, а также бифуркационный анализ полученных решений для круговых областей, бесконечной полосы и прямоугольника в зависимости от значений параметров — коэффициента диффузии (малый параметр) и коэффициента нелинейности среды (большой параметр).

Достижение поставленной цели требует решения следующих задач:

1. На кольце, круге, окружности (тонком кольце), бесконечной полосе и прямоугольнике описать в зависимости от значений бифуркационных параметров условия возникновения и существования 2π -периодических стационарных неоднородных в пространстве структур и периодических по времени структур ФДУ параболического типа с преобразованием пространственных переменных (оператором поворота, оператором сжатия, оператором отражения) с краевыми условиями второго рода. Провести бифуркационный анализ возникающих новых структур и исследовать их устойчивость при варьировании значений бифуркационных параметров.

2. На кольце, круге, окружности (тонком кольце), бесконечной полосе и прямоугольнике, используя метод центральных многообразий и согласованный с ним метод Галеркина, в зависимости от значений параметров получить асимптотическое представление неоднородных в пространстве стационарных структур, а также периодических по времени структур, провести анализ их устойчивости и выполнить численные эксперименты.
3. Описать условия, при которых происходит возникновение в рассматриваемой задаче на окружности метастабильных структур.
4. Показать существование и получить асимптотическую форму стационарных неоднородных в пространстве структур в задаче с косо́й производной для бесконечной полосы и для прямоугольника, возникающих при изменении значений бифуркационных параметров.

Объект исследования — квазилинейные ФДУ параболического типа с операторами преобразования пространственных переменных, дополненные краевыми условиями Неймана или условиями с косо́й производной.

Предмет исследования — стационарные неоднородные в пространстве и периодические по времени структуры, бифурцирующие при потере устойчивости одного из однородных в пространстве решений параболического ФДУ в пределах кольца, круга, окружности (тонкого кольца), полосы и прямоугольника с операторами поворота, радиального сжатия и отражения пространственных переменных, а также медленно меняющиеся (метастабильные) структуры в уравнении на окружности.

Методы исследования. Для решения поставленных задач были использованы методы функционального анализа, качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории бифуркаций и асимптотические методы, в частности, метод центральных многообразий и метод Галеркина. Для проведения вычислительных экспериментов и визуализации результатов использован пакет Wolfram Mathematica 11.3.

Научная новизна. Проведен бифуркационный анализ начально-краевой задачи для параболического ФДУ с преобразованием пространственных аргументов (оператором поворота, оператором поворота и сжатия) на кольце, (оператором поворота) на круге и окружности, (оператором отражения) на прямоугольнике, при условии что в качестве бифуркационного параметра рассматриваются коэффициент диффузии или коэффициент, пропорциональный интенсивности входящего светового поля. Доказано существования неоднородных в пространстве стационарных структур и периодических по времени структур. Исследованы форма и устойчивость неоднородных в пространстве стационарных структур и периодических по времени структур при непрерывном изменении бифуркационных параметров. Выявлены условия возникновения в параболическом ФДУ с оператором поворота пространственной переменной на окружности медленно меняющихся структур.

Используя преобразования Лапласа и Фурье, получено интегральное представление задачи с преобразованием инволюции на бесконечной полосе с краевыми условиями с косо́й производной. Доказано существование и получена асимптотическая форма решения задачи на прямоугольнике с преобразованием инволюции на бесконечной полосе с краевыми условиями с косо́й производной и условием периодичности.

Разработаны алгоритмы проведения численных экспериментов для задач, представленных в работе.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Результаты аналитического и численного бифуркационного анализа начально-краевой задачи с условиями Неймана для параболического ФДУ с преобразованием пространственных аргументов (оператором поворота, оператором поворота и сжатия) на кольце, (оператором поворота) на круге и окружности, при условии что в качестве бифуркационного параметра рассматриваются коэффициент диффузии или коэффициент, пропорциональный интенсивности входящего светового поля. Доказательство существования неоднородных в пространстве стационарных структур.

нарных структур и периодических по времени структур.

2. Построение асимптотической формы и результаты анализ устойчивости неоднородных в пространстве стационарных структур и периодических по времени структур при непрерывном изменении бифуркационных параметров. Условия возникновения в задаче на окружности с оператором поворота пространственной переменной медленно меняющихся структур и описание их динамики.
3. Результаты аналитического и численного анализа начально-краевой задачи с условиями с косо́й производной для параболического ФДУ с преобразованием инволюции на полосе и на прямоугольнике, при условии что в качестве бифуркационного параметра рассматриваются коэффициент диффузии. Доказательство существования неоднородных в пространстве стационарных структур. Представление задачи на бесконечной полосе с краевыми условиями с косо́й производной в виде нелинейного интегрального уравнения.
4. Доказательство существования и трехмодовая аппроксимация решения задачи на прямоугольнике с преобразованием инволюции и краевыми условиями с косо́й производной и условием периодичности.
5. Результаты проведения численных экспериментов для задач, представленных в работе.

Теоретическая и практическая значимость работы. Исследование посвящено изучению процессов структурообразования в начально-краевой задаче для ФДУ параболического типа с преобразованием переменных. Работа имеет теоретическую направленность и может быть полезна для исследования задач в области нелинейной оптики. Полученные результаты дополняют и развивают теорию ФДУ параболического типа, могут быть использованы для построения алгоритмов решения краевых задач, а также при исследовании различных оптических эффектов, важных для развития информационных

технологий, при планировании реальных экспериментов по нелинейной оптике в специальных оптических системах с обратной связью.

Степень достоверности результатов. Степень достоверности результатов проведенных исследований обеспечивается строгостью математических доказательств, использованием проверенного математического аппарата: методов функционального анализа, качественной теории полулинейных параболических дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории бифуркаций; метода центральных многообразий и метода Галеркина. Полученные результаты согласуются с результатами других авторов: Е. П. Белана, Е. М. Варфоломеева, А. Б. Муравника, А. В. Разгулина, А. С. Скубачевского, Ю. А. Хазовой и др.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на 23 международных, всероссийских и региональных конференциях, что подтверждается опубликованием тезисов докладов [51]- [65].

Результаты исследования были представлены на семинарах кафедры дифференциальных уравнений и геометрии, кафедры математического анализа Физико-технического института Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского и Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ.

Благодарности. С чувством глубокой признательности автор посвящает данную работу памяти своего научного руководителя доктора физико-математических наук профессора Евгения Петровича Белана, при активном участии которого были получены первые результаты, представленные в диссертации. Автор также выражает благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук доценту Владимиру Андреевичу Лукьяненко, за ценные советы по продолжению работы и за внимательное отношение к обсуждению проблем и результатов исследования.

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты по теме диссертации изложены в 22 печатных изданиях. Публикации полностью соответствуют теме диссертационного исследования и раскрывают её основные положения. Научные статьи [46], [50], [125], [126] опубликованы в журналах

из списка, рекомендованного диссертационным советом ЮФУ801.01.02 при ФГАОУ ВО "Южный федеральный университет". Научные статьи [46], [49], [50], [125], [126] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК и индексируемых в МБД Scopus, Web of Science. Научные статьи [45], [47], [48] индексируются в РИНЦ. Остальные научные статьи опубликованы в материалах и сборниках тезисов конференций.

Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ [48], [49], [50] в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

На базе Wolfram Mathematica 11.3 составлены и протестированы алгоритмы численных экспериментов и визуализации полученных результатов для каждой задачи, представленной в диссертационном исследовании.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–02-2023-1799.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка иллюстраций, списка литературы и приложения. Полный объем диссертации составляет 143 страницы с 21 рисунком. Список литературы содержит 141 наименование.

ГЛАВА 1. Начально-краевые задачи для нелинейного уравнения параболического типа с преобразованием аргументов

1.1. Обзор основных результатов и методов

Базовые результаты в исследовании инвариантных многообразий для состояний равновесия аналитических систем обыкновенных дифференциальных уравнений седлового типа принадлежат А. Пуанкаре [82] и А. М. Ляпунову [72], а также для случая гладких систем О. Перрону и Дж. Адамару.

Именно А. Пуанкаре впервые сформулировал принцип сведения, позволяющий заменить систему дифференциальных уравнений большой размерности интегральным многообразием решений малой размерности, сохраняющим качественные свойства первоначальной задачи и притягивающим все остальные интегральные кривые. Позднее Дж. Адамар доказал существование инвариантных многообразий, удовлетворяющих условию Липшица, для случая гладких систем.

Идеи, высказанные А. Пуанкаре, получили развитие в работах А. М. Ляпунова, которым было доказано, что во многих случаях анализ устойчивости тривиального решения системы нелинейных дифференциальных уравнений можно свести к анализу устойчивости решения одного уравнения первого порядка. Результаты исследований А. Пуанкаре и А. Данжуа для динамических систем на торе послужили основной теоретической базой метода интегральных многообразий нелинейной механики, основы которого были заложены Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в [25], а обоснование проведено в 1945 году Н. Н. Боголюбовым [24].

Метод интегральных многообразий Н. Н. Боголюбова получил развитие в работах Ю. А. Митропольского. В [26] Ю. А. Митропольский приводит обобщение теоремы Н. Н. Боголюбова об усреднении уравнений, а в [75] проводит изучение нестационарных процессов с применением метода интегральных многообразий. О. Б. Лыковой [71] эти идеи применены для решения задачи построения и исследования устойчивости локальных интегральных многообразий в окрестности стационарной точки и цикла.

Дальнейшее развитие метод интегральных многообразий получил в работах Ю. Н. Бибикова [23], Ю. Л. Далецкого и М. Г. Крейна [35], Ю. А. Митропольского и О. Б. Лыковой [76], В. А. Плисса [81], А. М. Самойленко [96], В. В. Стрыгина и В. С. Соболева [102], Д. Хенри [106], Дж. Хейла [107]. Значительное влияние на развитие теории центральных многообразий оказала изданная в 1967 году работа А. Келли [70]. Д. Руэль и Ф. Такенс в фундаментальной работе [95] успешно применили метод центральных многообразий для анализа бифуркаций Пуанкаре-Андронova-Хопфа.

В 1976 году Дж. Марсден и М. Мак-Кракен [74] сформулировали и доказали общую теорему о центральном многообразии для отображений в банаховом пространстве, а также установили возможность применения этой теоремы к широкому классу параболических уравнений, включая уравнение Навье-Стокса.

В 1981 году издана монография Д. Хенри [106], в которой для большого класса полулинейных параболических уравнений доказаны фундаментальные теоремы об инвариантных и центральных многообразиях. Для общего случая обоснован принцип сведения. В этом же году вышла работа J. Carr [116] о методе центральных многообразий и его применении для бифуркационного анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод центральных многообразий используется для проведения бифуркационного анализа в работах многих авторов, в частности, Дж. Гукенхаймера и Ф. Холмеса [34], С. Уиггинса [140], Ю. А. Кузнецова [131], Б. Хэссарда, Н. Казаринова, И. Вэна [108] и др.

Задачи, связанные с математическими моделями различных процессов в физике, химии, биологии, экологии и др., могут приводить к системам с малой диффузией бесконечной размерности. Для решения указанных задач Ю. С. Колесовым [42] был предложен асимптотический метод, основанный на применении одночастотного метода Боголюбова-Митропольского. Дальнейшие исследования бифуркаций в задачах для уравнений параболического типа с малым значением коэффициента диффузии представлены в работах А. Б. Васильевой, С. А. Кащенко, Ю. С. Колесова и Н. Х. Розова [30].

А. Ю. Колесовым и Н. Х. Розовым [41], Е. Ф. Мищенко, В. В. Садовничевым [77] были сформулированы базовые положения об автоволновых процессах, происходящих в нелинейных средах с малой диффузией, и разработаны новые асимптотические методы их исследования.

Изучение явления структурообразования в оптических системах с двумерной обратной связью, для которых характерен богатый набор самоорганизаций светового поля с возможностью управления данным явлением через изменение характеристик входного оптического сигнала или самой системы, приводит к параболическим ФДУ с преобразованием аргументов искомой функции (0.1). Характерна оптическая система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и по-разному организованной внешней двумерной обратной связью. В зависимости от того, как реализуется обратная связь, рассматриваемые модели могут быть обыкновенными дифференциальными уравнениями или параболическими ФДУ с преобразованием пространственных переменных искомой функции. Возможен более общий случай с учетом запаздывания в системе [117, 120, 133]. В этом случае ФДУ (0.1) описывает фазовую модуляцию световой волны $u(x, t)$, которая прошла через область в границах области $S \subset \mathbb{R}^2$ тонкого слоя нелинейной среды керровского типа. Уравнение дополняется краевыми условиями на границе ∂S , а также начальными условиями при $(x, t) \in S \times [-\tau, 0]$.

В результате экспериментальных исследований в оптических системах с обратной связью и теоретического анализа их математических моделей М. А. Воронцовым, Н. И. Железных [31, 139] были обнаружены неоднородные в пространстве стационарные структуры. В цикле работ С. А. Кащенко, Е. В. Григорьевой, Н. Накен, А. Pelster (например, [40, 122]) исследованы вопросы существования, формы и устойчивости неоднородных в пространстве стационарных структур в параболической задаче на окружности с малой диффузией и оператором поворота пространственной переменной на угол близкий к рационально соизмеримому с π .

Для случая задачи параболического типа с оператором отражения на отрезке, симметричном относительно начала координат, в работе В. А. Чуш-

кина, А. В. Разгулина [110] проведен анализ неоднородных в пространстве стационарных режимов, которые возникают в результате потери устойчивости однородного в пространстве стационарного режима. Аналогичные вопросы исследовались в работах М. А. Воронцова [32, 33].

В работах С. А. Кащенко [40], А. В. Разгулина [84, 86], Т. Е. Романенко [91] исследовались периодические по времени решения типа бегущей волны, которые возникают в параболическом уравнении на окружности с оператором поворота пространственной переменной. Проблемы описания асимптотической формы и анализа устойчивости ротационных волн в параболическом уравнении на круге с оператором поворота пространственной переменной исследовались в работах А. В. Разгулина [85], Т. Е. Романенко [90], Е. П. Белана и О. Б. Лыковой [14, 15]. В частности, Е. П. Беланом в [7, 40, 122] исследовано взаимодействие периодических по времени решений, возникающих в параболической задаче на окружности с оператором поворота пространственной переменной в регулярном случае. Е. П. Беланом и О. Б. Лыковой [14, 15] исследована бифуркация рождения вращающихся структур в параболическом уравнении на круге с оператором поворота и радиального сжатия пространственных аргументов. Близкие к рассматриваемым в диссертации задачи исследовались в работах А. Н. Куликова и Д. А. Куликова [66, 67, 94].

А. Л. Скубачевским в [97–101, 135] исследованы бифуркации периодических решений на гладкой произвольной области S с условиями Неймана и гладким обратимым преобразованием q . В [97, 135] описаны методы построения периодических решений.

Согласно работам Ю. С. Колесова, Н. Х. Розова [43], Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовниченко, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова [77], Е. П. Белана [4, 6, 8, 21] в параболической задаче с преобразованием пространственной переменной и малой диффузией реализуется явление буферности бегущих волн, которое, как показано в [8, 10], носит высокомодовый характер. В [10–12] строится иерархия упрощенных моделей — галеркинских аппроксимаций.

Метод квазинормальных форм для параболического ФДУ с поворотом для случая малой диффузии применен в [40, 122] для описания динамики

бегущих волн и медленно меняющихся структур.

В параболических задачах с малой диффузией при выполнении определенных условий наблюдаются медленно меняющиеся решения (так называемые метаустойчивые структуры) [45, 104]. Отметим, что фундаментальные результаты по метаустойчивым структурам в параболической задаче на отрезке с условием Неймана и малым коэффициентом диффузии получены J. Carr, R. L. Pego [9], G. Fusco, J. K. Hale [121].

Е. П. Беланом в [13] приведены представления неоднородных в пространстве стационарных структур для прямоугольника с оператором отражения одной из пространственных переменных.

В [90, 122, 137] показано, что на окружности в случае использования оператора поворота пространственных аргументов в результате бифуркации Андронова-Хопфа происходит рождение вращающихся волн, их взаимодействие на окружности изучалось в работах [7, 8]. Двумерные вращающиеся волны в круге с оператором поворота рассматривались в [14].

Подобные модели возникают при исследовании мезомасштабных вихревых структур (торнадо) [73] в активной среде и описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \Delta u_i + f_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Для математического описания процесса образования вихревых структур в работе [73] используется уравнение Навье-Стокса [136]. В уравнениях типа (1.1) учитываются наличие неоднородностей, нелинейностей и значимых параметров (коэффициента интенсивности входного сигнала, коэффициента диффузии среды, коэффициента контрастности среды), типа преобразования координат, области, вида краевых условий и др. Конкретные типы решений получаются в результате выбора параметров входного излучения или параметров оптической системы.

В диссертационной работе к системе уравнений (1.1) сводится уравнение с оператором инволюции Q (n уравнений для $Q^n = I$).

В работе [37] (продолжение работ [38, 112]) "рассматриваются процессы

формирования фазовых пространственных структур в поперечном сечении когерентного светового пучка в нелинейной оптической системе с пространственно распределенной обратной связью — нелинейном кольцевом резонаторе (используется тонкий слой нелинейной среды керровского типа). Взаимодействие световой волны с нелинейной средой учитывает диффузию и дифракцию при распространении волны в резонаторе" [37]. Динамика нелинейной фазовой модуляции $u(r, t)$ описывается системой уравнений (аналогичных рассматриваемым в данной работе)

$$\tau_0 \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} + u(r, t) = D\Delta u(r, t) + K|A(r, z = 0, t)|^2, \quad (1.2)$$

$$A(r, z = 0, t + t_r) = \sqrt{1 - R}A_{in}(r) + R \exp[i\varphi_0] \exp[iL\Delta]A(r, z = 0, t) \exp[in(r_1t)], \quad (1.3)$$

$$-2ik_0 \frac{\partial A(r, z, t)}{\partial z} = \Delta A(r, z, t). \quad (1.4)$$

"Здесь $r = (x, y)$ — радиус-вектор в поперечном сечении светового поля; z — продольная координата; t — время; τ_0 — характерное время релаксации нелинейности; Δ — лапласиан по переменным (x, y) , описывающий диффузионный процесс в нелинейной среде; D — нормированный коэффициент диффузии; K — коэффициент нелинейности среды; $|A(r, z = 0, t)|^2$ — интенсивность светового поля, попадающего в нелинейную среду; $A(r, z, t)$ — комплексная медленно меняющаяся амплитуда светового поля внутри резонатора; R — коэффициент отражения зеркал по интенсивности; t_r — время распространения поля в резонаторе; $A_{in}(r)$ — комплексная амплитуда входной световой волны; φ_0 — постоянный фазовый сдвиг световой волны; L — длина резонатора (нормированная на дифракционную длину); $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число; l — толщина слоя нелинейной среды [37]. При допущениях $l \ll L, t_r = L/c \ll \tau_0$ "медленной нелинейности" уравнение (1.2) является упрощенным вариантом уравнения Икеды" [123].

Однородным в пространстве стационарным решением системы (1.2)–(1.4), в окрестности которого проводится линеаризация исходных уравнений, явля-

ется решение определяемое равенством

$$u_s = \frac{(1 - R)KI_0}{1 + R^2 - 2R \cos(u_s + \varphi_0)},$$

где $u_s = K|A_s|^2$, $I_0 = |A_{in}|^2$. Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали богатую динамику исследуемой системы: формируются сложные поперечные структуры (flower like — структуры), динамические фазовые пространственные структуры типа ролла и гексагона, возникающие в результате конкуренции нелинейных мод в резонаторе, а также сложные фазовые структуры, формирующиеся в результате кооперативной динамики нелинейных мод.

В работах Н. А. Куликова, Д. А. Куликова [67, 68, 130] и А. М. Ковалевой [129] рассматриваются математические модели процесса формирования рельефа на поверхности пластины под воздействием потока ионов, описываемые уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + hc \frac{\partial w}{\partial x} + hb_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + hb_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3,$$

где $u = u(t, x)$, $w = u(t, x + h)$, $h, c, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $|h| \ll 1$ при условии, что $h \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$. Используя метод центральных инвариантных многообразий и аппарат теории нормальных форм, строятся неоднородные в пространстве решения и проводится анализ их устойчивости.

Известно, что дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа могут описывать временные и пространственные закономерности распространения информации в онлайн-социальных сетях. Исследования неавтономной диффузионной модели с граничными условиями Дирихле, описывающей процесс распространения информации в социальных сетях, проводилось Б. Ду, К. Лианом и К. Ченгом [119]. Построив верхнее и нижнее решения, получено описание динамики поведения решения неавтономной диффузионной логистической модели. Показано, что на распространение информации сильно влияют коэффициент диффузии и собственная скорость роста. Логические модели рассматривались в работах В. Г. Цибулина ().

Динамика решений, рассматриваемых задач, зависит от краевых условий. Как правило, исследуются краевые задачи с условиями Неймана. В работах [132], [118] показано, что краевые условия с косой (наклонной) производной позволяют моделировать спиральные волны, которые возникают в процессах различной природы, в частности, в нелинейных оптических системах [113], [141].

В работах [44] приводится решение краевой задачи с косой производной для уравнения эллиптико-гиперболического типа Лаврентьева – Бицадзе в области, состоящей из верхней полуплоскости (где уравнение эллиптическое) и прилегающей полосы (где уравнение гиперболическое). На прямой, ограничивающей полосу, задана наклонная производная, а на границе раздела полосы и полуплоскости решения сопрягаются краевыми условиями четвертого рода. В результате получено сингулярное интегральное уравнение, которое сводится к краевой задаче Римана со сдвигом [124].

Вопросам существования и устойчивости спиральных волн в модельном ФДУ диффузии с запаздыванием, описывающем динамику нелинейно-оптической системы с контуром обратной связи в тонком кольцевом пространстве с граничными условиями с косой производной, посвящены работы [114], [115].

Задача нахождения гармонической функции в области, являющейся четвертью круга, с наклонной производной на части границы приводится в [78]. Показано существование и единственность линейно независимого нетривиального решения и получено его представление.

Таким образом, задача моделирования явлений структурообразования в начально-краевых задачах ФДУ параболического типа, проявляющихся в экспериментах, таких как бегущие (вращающиеся) волны, актуальна и далека от завершения. Здесь существенную роль играют форма области, параметры задачи, организация обратной связи, краевые условия и др. Исследование таких задач актуально, как с точки зрения теории нелинейных ФДУ параболического типа, так и в связи с разнообразными приложениями в нелинейной оптике.

1.2. Общая постановка задач для уравнений с преобразованием переменных

Рассмотрим ФДУ параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - u + f(Qu), \quad t \geq 0, \quad D > 0, \quad (1.5)$$

которым определяется фазовая модуляция световой волны $u(x, t)$, прошедшая тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе в контуре обратной связи [1, 89] в пределах апертуры $S \subset \mathbb{R}^2$, с условиями на границе ∂S , начальным условием и условием 2π -периодичности. Из физической постановки задачи следует, что $f(Qu) = K(1 + \gamma \cos Qu)$, где в качестве оператора Q для круговых областей выбраны либо оператор инволюции $Q = Q_h$, обладающий свойством $Q^p = I$ [39], $p \in \mathbb{N}$, либо комбинация операторов поворота и радиального сжатия; для полосы и прямоугольника — оператор отражения относительно одного из пространственных аргументов.

В отличие от многих исследователей в работе бифуркационными параметрами являются либо коэффициент диффузии D , либо одновременно D и коэффициент пропорциональности интенсивности светового потока K .

В качестве области S рассматриваются:

- 1) кольцо $S = S^r = \{(r, \theta) \mid 0 < r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$;
- 2) круг ($r_1 = 0, r_2 = r_0$) $S = S^c = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq r_0; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$;
- 3) окружность (узкое кольцо, $r_2 - r_1 = \delta \ll 1$)

$$S = S^1 = \{(r, \theta) \mid 0 < r_1 \leq r \leq r_2; r_2 - r_1 = \delta \ll 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\};$$

$$4) \text{ полоса } S = S^l = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, |y| < l\};$$

$$5) \text{ прямоугольник } S = S^d = \{(x, y) \mid |x| < d, |y| < l\}.$$

Для круговых областей $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат. Для всех указанных круговых областей решение $u(r, \theta, t)$ удовлетворяет условию периодичности $u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t)$. Для круга и кольца оператор Q может совмещать преобразование и радиальной, и угловой координат $q(r, \theta) = (\kappa r, \theta + h)$, $0 < \kappa < 1$, $0 < h < 2\pi$, т. е.

операторы сжатия и поворота. Для окружности оператор Q представляет собой преобразование только угловой координаты $q(\theta) = (\theta + h)$ — оператор поворота. Если рассматривается $Qu = Q_h u = u(r, \theta + h, t)$ — оператор поворота на угол $h = \frac{2\pi}{p}$ ($p \in \mathbb{N}$), то оператор Q_h является оператором инволюции $Q^p = I$ [39]. В уравнении (1.5) для бесконечной полосы и прямоугольника — преобразование $Qu = Q_h u = u(-x, y, t)$, $Q_h^2 = I$.

При исследовании задачи (1.5) для кольца и круга используются функциональные пространства: $H = H(S) = L_2^r(S)$ — пространства функций из $L_2(S)$, квадратично интегрируемых с весом r , со скалярным произведением и нормой, соответственно,

$$\langle u, v \rangle_H = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} u(r, \theta) \overline{v(r, \theta)} r dr d\theta, \quad \|u\|_H^2 = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} |u(r, \theta)|^2 r dr d\theta,$$

здесь $\langle *, * \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H ; функциональное пространство H^2 — пространство Соболева комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и нормой [84], соответственно,

$$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_H + \langle (-\Delta)^{1/2} u, (-\Delta)^{1/2} v \rangle_H, \quad \|u\|_{H^2}^2 = \langle u, u \rangle_{H^2}.$$

Шкалу пространств, порожденную оператором $-\Delta$ с учетом краевых условий обозначим H^s , $s \in \mathbb{Z}_+$. Норма в пространстве H^s , определяется формулой $\|u\|_s^2 = \langle (-\Delta)^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$.

Скалярное произведение в пространстве Соболева $H^m(S)$ функций, измеримых на S , определим равенством

$$\langle u, v \rangle_m = \frac{1}{\pi} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_S \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Норма в $H^m(S)$ определяется стандартным образом. Пространство $H^m = H^m(S) \cap \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0 \right\}$ является пополнением пространства бесконечно дифференцируемых на S функций, удовлетворяющих краевому условию по норме $\|\cdot\|_m$.

Обозначим H^{-1} — пространство, сопряженное пространству H^1 . Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|_{-1} = \sup \left\{ \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|_1} \quad (v \in H^1, v \neq 0) \right\}.$$

По теореме Соболева имеют место непрерывные вложения $H^1 \subset H \subset H^{-1}$.

Пусть \mathbf{B} — банахово пространство, $C(\mathbf{B})$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на вещественной оси функций, принимающих значения из пространства \mathbf{B} . Определим норму в этом пространстве равенством $\|u\|_{C(\mathbf{B})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u\|_{\mathbf{B}}$. В банаховом пространстве $M^2(\mathbf{B})$ измеримых функций

$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{B}$ определим норму $\|u\|_{M^2(\mathbf{B})} = \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^1 \|u(t+s)\|_{\mathbf{B}}^2 ds \right)^{1/2}$. Введем пространство $U = C(\mathbf{B}) \cap M^2(\mathbf{B})$ с нормой $\|u\| = \|u\|_{C(\mathbf{B})} + \|u\|_{M^2(\mathbf{B})}$.

Оператор $Q : H \rightarrow H$, $Q : H^1 \rightarrow H^1$ в правой части уравнения (1.5), является линейным и ограниченным и $\|Q\|_{Hom(H)} = \kappa^{-1}$.

На основании работы [3] следует утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $T > 0$. Начально-краевая задача (1.5) с начальным условием $u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta) \in H$ имеет единственное решение $u(r, \theta, t)$, принадлежащее пространству $L_\infty(H, [0, T]) \cap L_2(H^1, [0, T])$.

В задаче (1.5) выбрано фазовое пространство H^1 .

Корректность начально-краевой задачи (1.5) доказана в [111], для кольца S^r и окружности S^1 доказательство аналогично. Легко показать, что если $u(r, \theta, t)$ решение этой задачи, то функция $u(r, \theta + \alpha, t)$, где $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, также решение (1.5), т. е. задача (1.5) S^1 -эквивариантна.

Покажем существование, исследуем асимптотическую форму и проведем анализ устойчивости решений начально-краевой задачи (1.5), которые бифурцируют из однородного в пространстве состояния равновесия, определяемого уравнением

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (1.6)$$

Известно, что указанная задача в зависимости от вида преобразования Q обладает богатым набором бифурцирующих структур. Согласно [41, 77]

при увеличении значения параметра K происходит рост числа корней уравнения (1.6), которые существуют одновременно, причем состав их постоянно обновляется. Зафиксируем непрерывную ветвь решений уравнения (1.6) $w = w(K)$, удовлетворяющую следующему условию.

Условие 1.1. Уравнение (1.6) при $K = \widehat{K}$ имеет такое решение $w = \widehat{w}$, что $1 + \widehat{K}\gamma \sin \widehat{w} \neq 0$.

Выполнение условия 1.1, по теореме о неявной функции, обеспечивает существование в окрестности точки \widehat{K} аналитической функции $w(\nu) = w(\widehat{K} + \nu)$, $w(0) = \widehat{w}$, $w'(0) = \frac{1 + \gamma \cos \widehat{w}}{1 + \widehat{K}\gamma \sin \widehat{w}}$, удовлетворяющей уравнению (1.6) при $K = \widehat{K} + \nu$.

Имеет место следующее утверждение, позволяющее рассматривать различные модельные уравнения задачи (1.5).

Лемма 1.1. Пусть $w = w(x, t)$, $x \in S$ — какое-либо решение уравнения (1.5), обозначим $u = w + v$, где $v = v(x, t)$ — новая неизвестная функция. Тогда относительно v получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qv, Qw), \quad (1.7)$$

где

$$f(Qv, Qw) = K\gamma \left[\cos Qw \left(-\frac{(Qv)^2}{2!} + \frac{(Qv)^4}{4!} - \dots \right) - \sin Qw \left(-\frac{(Qv)^3}{3!} + \frac{(Qv)^5}{5!} - \dots \right) \right], \quad v \in H.$$

Доказательство. Действительно, так как

$$\cos(w + v) = \cos w(\cos v - 1) - \sin w \sin v + \cos w,$$

то выражение $K[1 + \gamma \cos Qu]$ примет вид:

$$\begin{aligned} K[1 + \gamma \cos Qu] &= K[1 + \gamma \cos Q(w + v)] = \\ &= K \left[1 + \gamma(\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw \sin Qv + \cos Qw) \right] = \\ &= K[1 + \gamma \cos Qw] - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qw, Qv). \end{aligned}$$

В предположении, что исследуются малые решения v в окрестности известной функции w , сохраняя несколько членов разложения функций $f(Qw, Qv)$

в ряд по степеням v , получим ряд модельных задач. Действительно, учитывая разложение $\cos v$ и $\sin v$ по степеням v , разложение нелинейной функции $f(Qv, Qw)$ в ряд по степеням v начинается с v^2 и $f(0, Qw) = 0$:

$$f(Qv, Qw) = K\gamma \left[\cos Qw \left(-\frac{(Qv)^2}{2!} + \frac{(Qv)^4}{4!} - \frac{(Qv)^6}{6!} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{n-1} \frac{(Qv)^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots \right) - \right. \\ \left. - \sin Qw \left(-\frac{(Qv)^3}{3!} + \frac{(Qv)^5}{5!} - \frac{(Qv)^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(Qv)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) \right].$$

□

Далее будем рассматривать одно из модельных уравнений задачи (1.5):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v - v + \Lambda Qv + \Omega Qv^2 - \frac{\Lambda}{6} Qv^3 + \dots, \quad x \in S, \quad t \geq 0 \quad (1.8)$$

$$\Lambda = -K\gamma \sin w, \quad \Omega = \frac{K\gamma \cos w}{2}, \quad (1.9)$$

с условием Неймана или условием с косой производной на границе, начальным условием и условием периодичности. Здесь и далее многоточие означает те слагаемые, которые имеют более высокий порядок малости чем v^3 .

При различных значениях параметров D и K уравнения (1.5) рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений типа бегущей волны, бифурцирующих от одного из решений $u(x, t) = w$, определяемых уравнением (1.6).

Наиболее общей является задача для кольца $S^r(r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Набор круговых областей позволяет конкретизировать структуру решений и получать приближенные решения характерные для конкретных областей.

1.3. Частные случаи решений

На примере кольца рассмотрим частные решения задачи, зависящие от конкретных аргументов. Рассмотрим линеаризацию уравнения (1.8) в зависимости от предположений о решении w .

1. Решение постоянное. Пусть $w = const$ — однородное в пространстве решение (1.8), которое определяется равенством (1.6). Число решений уравнения (1.6) зависит от параметров K и γ . При возрастании значения K происходит увеличение числа решений. В пакете Wolfram Mathematica 11.3 построена бифуркационная диаграмма для (1.6) (см. рисунок 1.1), из которой видно, как возрастает число решений уравнения (1.6).

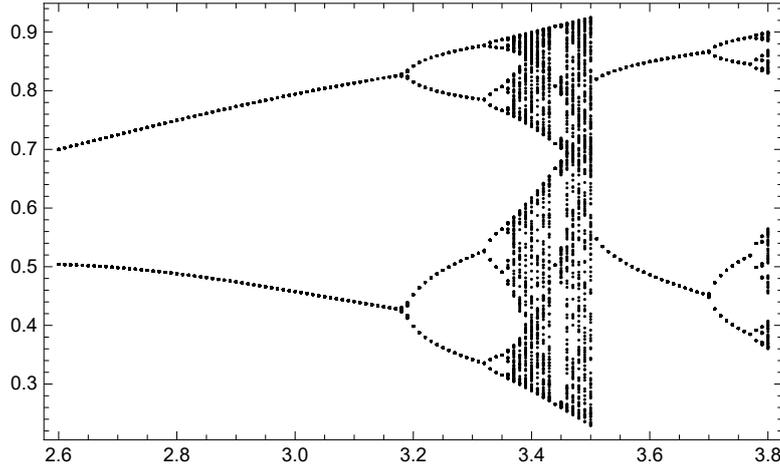


Рис. 1.1: Бифуркационная диаграмма решений уравнения (1.6).

Далее, через W_0 будем обозначать класс однородных в пространстве стационарных решений w уравнения (1.8), определяемых равенством (1.6), W_1 — класс неоднородных в пространстве стационарных решений w уравнения (1.8).

2. Решение, зависящее только от времени $w = w(t)$, определяется уравнением $\frac{\partial w}{\partial t} + w = K(1 + \gamma \cos w)$, которое можно записать в виде

$$\int_{w_0}^w \frac{ds}{K(1 + \gamma \cos s) - s} = t + C. \quad (1.10)$$

При $t = 0$ значение $u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta)$, но так как $u = w(t)$ не зависит от r и θ , то $w(0) = const = w_0$, т. е. $C = 0$. На рисунке 1.2 представлены решения уравнения (1.10) при $\gamma = 0, 5$ и различных значений K .

3. Решение зависит только от угловой координаты $w = w(\theta)$. Получаем обыкновенное нелинейное ФДУ второго порядка

$$Dw''(\theta) - w(\theta) + K(1 + \gamma \cos Qw(\theta)) = 0 \quad (1.11)$$

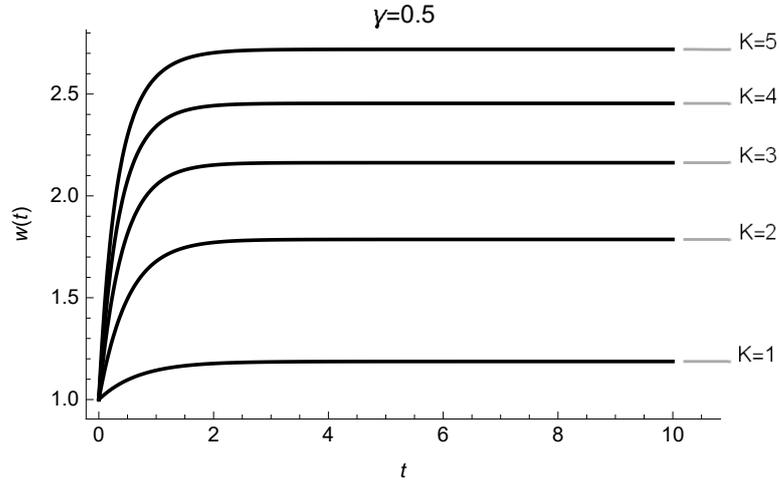


Рис. 1.2: Решения $u = w(t)$ при фиксированном значении $\gamma = 0,5$ и различных значениях параметра K .

с условием периодичности $w(\theta + 2\pi) = w(\theta)$.

Решение уравнения (1.11) в зависимости от оператора Q может быть сведено к равносильной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, при $p = 2$ получим $Q^2 w(\theta) = w(\theta)$. Обозначив $w(\theta) = w_0(\theta)$, $Qw(\theta) = Qw_0(\theta) = w_1(\theta)$, $Q^2 w(\theta) = w_0(\theta)$, перейдем к системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} w_0''(\theta) &= D^{-1}(w_0(\theta) - K(1 + \gamma \cos w_1(\theta))), \\ w_1''(\theta) &= D^{-1}(w_1(\theta) - K(1 + \gamma \cos w_0(\theta))). \end{aligned}$$

Обозначим $w_0'(\theta) = v_0(\theta)$, $w_0''(\theta) = v_0'(\theta)$, $w_1'(\theta) = v_1(\theta)$, $w_1''(\theta) = v_1'(\theta)$, тогда (аналог системы (1.5))

$$\begin{aligned} w_0'(\theta) &= v_0(\theta), & v_0'(\theta) &= D^{-1}(w_0(\theta) - K(1 + \gamma \cos w_1(\theta))), \\ w_1'(\theta) &= v_1(\theta), & v_1'(\theta) &= D^{-1}(w_1(\theta) - K(1 + \gamma \cos w_0(\theta))). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Стационарные точки системы (1.12) в плоскости переменных w_0, w_1 определяются равенствами

$$w_0(\theta) = K(1 + \gamma \cos w_1(\theta)), \quad w_1(\theta) = K(1 + \gamma \cos w_0(\theta)). \quad (1.13)$$

На рисунке 1.3а) для $\gamma = 0.5$ и $K = 1, 2, 3, 4, 5$ особые точки системы (1.13) представляют собой точки пересечения симметричных относительно прямой $w_0 = W_1$ линий (сплошной и пунктирной линий). На рисунке 1.3б)

изображен фазовый портрет системы (1.13) при $\gamma = 0.5$, $K = 10$. Система (1.13) при $w_0(\theta) = w_1(\theta)$ имеет те же решения, что и (1.6).

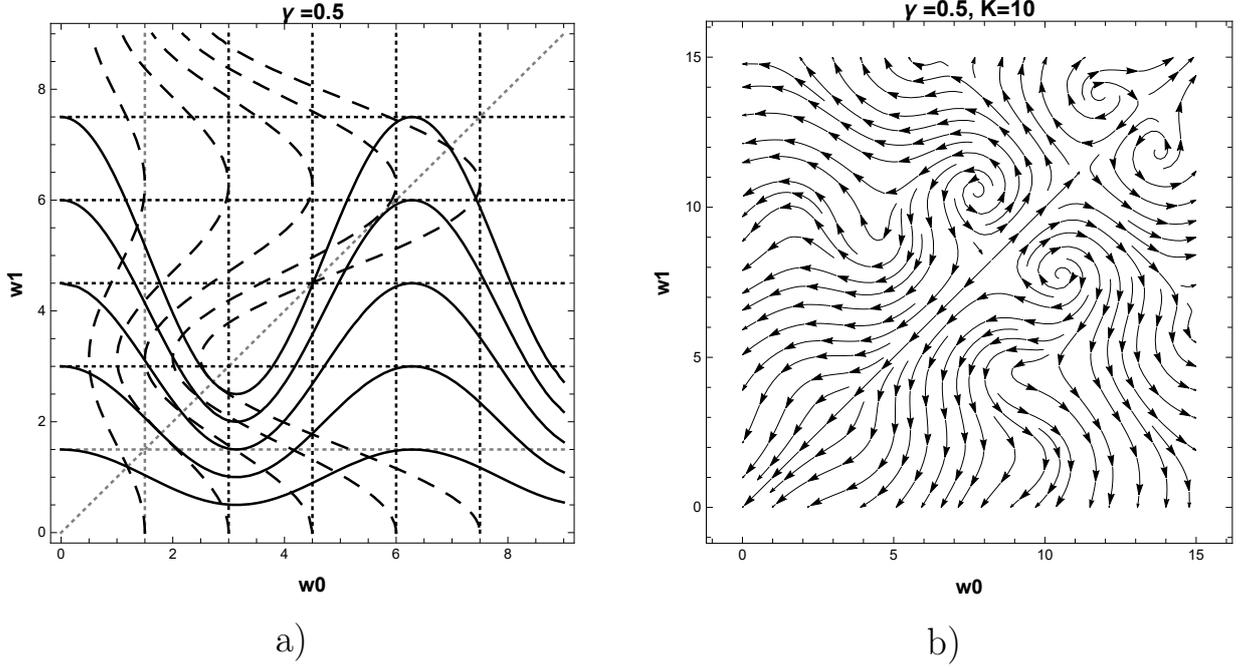


Рис. 1.3: (а) Решения (1.13) при $K = 1, 2, 3, 4, 5$; (б) фазовый портрет системы (1.13) при $\gamma = 0.5$, $K = 10$.

Аналогично, можно провести исследования для других p .

4. Решение зависит только от радиальной координаты r . В этом случае $\Delta w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$ и приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{1}{D} w + \frac{K}{D} (1 + \gamma \cos w) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad (1.14)$$

например, с краевыми условиями первого, второго и третьего рода.

На рисунке 1.4 представлены приближенные решения уравнения (1.14) с начальным условием $w(0) = 1$ при $\gamma = 0,5$ и различных значениях параметра K . Обозначив $\frac{dw}{dr} = V$, $\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{dV}{dr}$, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$w' = V, \quad V' = -\frac{1}{r} V + \frac{1}{D} w - \frac{K}{D} (1 + \gamma \cos w). \quad (1.15)$$

Точки равновесия определяются равенством $w = K(1 + \gamma \cos w)$, т. е. условием 1.1. Фазовые траектории (1.15) в окрестности точек равновесия систе-

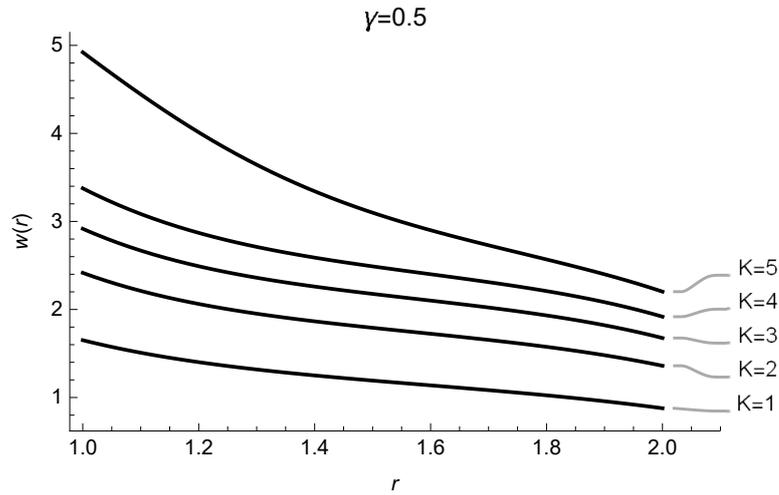


Рис. 1.4: Решения $u = w(r)$ при фиксированном значении $\gamma = 0,5$ и различных значениях параметра K .

мы (1.15) определяются уравнением

$$\frac{dV}{dw} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{D} \cdot \frac{w - K(1 + \gamma \cos w)}{V}.$$

5. Решение зависит только от пространственных переменных r и θ :
 $w = w(r, \theta) : w = D\Delta w + K(1 + \gamma \cos Q_h w)$ – возникает при решении задачи Штурма-Лиувилля для линейного уравнения $\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v - (K\gamma \sin Q_h w)Q_h v$.
 Этот случай более подробно будет рассмотрен в разделе 2.

Выводы к главе 1

Изучение явлений структурообразования в оптической системе, состоящей из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного внешнего контура двумерной обратной связи, управление динамикой которой производится за счет изменения параметров оптического сигнала на входе или параметров самой системы, описываемые параболическими ФДУ с преобразованием аргументов искомой функции, актуально и имеет богатую историю исследований. Возобновление интереса к дальнейшим научным изысканиям в данной области связано, прежде всего, с перспективой их использования в области обработки данных в компьютерных технологиях. Наиболее востребованы задачи с краевыми условиями первого или второго рода.

Выделена характерная математическая формализованная модель с нелинейностью до третьего порядка, которая исследуется в следующих главах и представляет собой начально-краевую задачу с условиями Неймана или условием с косой производной на границе и условием периодичности для ФДУ параболического типа с преобразованиями поворота и радиального сжатия на кольце, поворота на круге и окружности, с условием с косой производной на полосе и прямоугольнике.

В зависимости решения от переменных приводятся частные случаи задач.

ГЛАВА 2. Задача на кольце с операторами поворота и радиального сжатия

В данной главе рассматривается ФДУ на кольце $S = S^r = \{(r, \theta) | 0 < r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \theta < 2\pi\}$, в частности, с оператором инволюции $Q = Q_h : Q^p = I, p \in \mathbb{N}$ [39] в контуре обратной связи [1, 89]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Q_h u), \quad x \in S^r, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

где $u = u(r, \theta, t)$, $Q_h u = u(r, \theta + h, t)$ — оператор поворота на угол h , например, для $h = 2\pi/p$ ($p \in \mathbb{N}$), с условиями первого, второго или третьего рода на границе в зависимости от параметров a_1, a_2, b_1, b_2

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial u(r_1, \theta, t)}{\partial r} + b_1 u(r_1, \theta, t) &= \tilde{g}_1(\theta, t), \\ a_2 \frac{\partial u(r_2, \theta, t)}{\partial r} - b_2 u(r_2, \theta, t) &= \tilde{g}_2(\theta, t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

начальным условием

$$u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta), \quad (2.3)$$

условием 2π -периодичности

$$u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t). \quad (2.4)$$

Здесь Δu — оператор Лапласа в полярной системе координат, $D > 0$, $K > 0$, γ ($0 < \gamma < 1$).

Пусть $w = w(r, \theta, t)$ — одно из решений задачи (2.1)–(2.4). Представим $u = w + v$, где $v = v(r, \theta, t)$ — новая неизвестная функция. Тогда уравнение (2.1) относительно v примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w), \quad (2.5)$$

где $f(Q_h v, Q_h w) = K\gamma (\cos Q_h w (\cos Q_h v - 1) - \sin Q_h w (\sin Q_h v - Q_h v))$. Рассмотрим данную задачу с условиями Неймана на границе при $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$ в (2.2)

$$\frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} = g_1(\theta, t), \quad \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} = g_2(\theta, t), \quad (2.6)$$

начальным условием $v(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta)$ и условием периодичности $v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t)$.

Ставится задача получения асимптотического представления для стационарного решения их класса W_1 и периодического по времени решения, которые возникают при потере устойчивости стационарного решения их класса W_0 , определяемого условием 1.1, а также проведения анализа их устойчивости.

2.1. Линейная задача для кольца

Запишем уравнение (2.5) в виде (подчеркнём зависимость от параметров D и K):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(D, K)v + N(Q_h v), \quad (2.7)$$

где $L(D, K) = D\Delta v - v - K\gamma \sin w Q_h v$, $N(Q_h v) = f(Q_h v, w)$.

Согласно лемме 3.1 [97], оператор $L(D, K)$ в пространстве H с областью определения H^2 имеет компактную резольвенту и, следовательно, дискретный спектр. Обозначим λ_n , $n = 1, 2, \dots$ — собственные значения оператора $L(D, K)$.

В работе автора [125], используя метод разделения переменных, для оператора $L(D, K)$, действующего в пространстве $H(S^r)$ с областью определения $H^2(S^r)$, доказана лемма.

Лемма 2.1. Оператор $L(D, K)$ на кольце S^r имеет полную в $H(S^r)$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}(r, \theta) = R(\lambda_{n,m} r) \exp[in\theta] = R_{n,m}(r) \exp[in\theta],$$

где

$$\begin{aligned} L(D, K)\psi_{n,m}(r, \theta) &= (-1 - D\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh])\psi_{n,m}(r, \theta), \\ R_{n,m}(r) &= J_n(\lambda_{n,m} r) \cdot Y'_n(\lambda_{n,m} r_1) - Y_n(\lambda_{n,m} r) \cdot J'_n(\lambda_{n,m} r_1), \\ \tilde{R}_{n,m}(r) &= \frac{R_{n,m}(r)}{\|R_{n,m}(r)\|}, \quad \left(\tilde{R}_{n,m}, \tilde{R}_{n,m} \right) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь J_n, Y_n функции Бесселя первого и второго рода соответственно, порядка n ,

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \tilde{\psi}_n(x), \text{ где } \tilde{\psi}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\text{ctg } \pi\alpha \cdot J_\alpha(x) - \frac{1}{\sin \pi\alpha} \cdot J_{-\alpha}(x) \right),$$

$\tilde{\lambda} = \lambda_{n,m}$ — корни уравнения

$$J'_n(\tilde{\lambda}r_1) \cdot Y'_n(\tilde{\lambda}r_2) - J'_n(\tilde{\lambda}r_2) \cdot Y'_n(\tilde{\lambda}r_1) = 0. \quad (2.9)$$

Функции $R(r) = R(\lambda_{n,m}r)$ являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\tilde{\lambda}^2 r^2 - n^2) R(r) = 0, \quad (2.10)$$

$$R'(r_1) = 0, \quad R'(r_2) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Норма $R(r)$ определяется равенством

$$d_{n,m}^2 = \frac{2}{\pi^2 \lambda_{n,m}^2 r_1^2} \left[\frac{\pi^2 r_1^2}{4} (\lambda_{n,m}^2 r_2^2 - n^2) (R_{n,m}(r_2))^2 - (\lambda_{n,m}^2 r_1^2 - n^2) \right], \quad (2.11)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots$$

Собственные значения оператора $L(D, K)$ для $w = \text{const}$:

$$\lambda_{n,m}^r = -D\lambda_{n,m}^2 - 1 + \Lambda \exp[i\text{inh}], \quad (2.12)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, m = 1, 2, \dots, \Lambda = -K\gamma \sin Qw = -K\gamma \sin w$.

В зависимости от значений действительной и мнимой частей $\lambda_{n,m}^r$ могут быть реализованы различные типы решений, бифурцирующие из стационарного решения, принадлежащего классу решений W_0 . В частности, при $\text{Re}\lambda_{n,m}^r \neq 0, \text{Im}\lambda_{n,m}^r = 0$ происходит бифуркация решения из класса W_1 , при $\text{Re}\lambda_{n,m}^r = 0, \text{Im}\lambda_{n,m}^r \neq 0$ — периодических по времени решений.

2.2. Интегральное представление

Пусть $u = w = \text{const}$ — одно из решений задачи (2.1) из класса W_0 , удовлетворяющее условию 1.1, определяемое уравнением (1.6). В окрестности w рассмотрим задачу (2.5)–(2.6).

Уравнение (2.5), в зависимости от специфики постановки задачи, будем представлять в трех операторных формах

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= L_j v + N_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ L_1 v &= D\Delta v, \quad N_1 = -v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w); \\ L_2 v &= D\Delta v - v, \quad N_2 = -K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v + f(Q_h v, Q_h w); \\ L_3 v &= D\Delta v - v - K\gamma \sin Q_h w \cdot Q_h v, \quad N_3 = f(Q_h v, Q_h w).\end{aligned}$$

В случае $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ функции Грина G_1, G_2 для операторов L_1, L_2 имеют вид

$$\begin{aligned}G_1(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) &= \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp[-in(\theta - \varphi)] R_{n,m}(r) R_{n,m}(\rho) \exp[-D\lambda_{n,m}^2(t - \tau)]}{d_{n,m}^2(r)}, \\ G_2(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) &= \\ &= \frac{\rho}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp[-in(\theta - \varphi)] R_{n,m}(r) R_{n,m}(\rho) \exp[-(1 + D\lambda_{n,m}^2)(t - \tau)]}{d_{n,m}^2(r)},\end{aligned}$$

здесь $R_{n,m}(r)$ определяются равенством (2.8), $\lambda_{n,m}$ — расположенные по возрастанию корни уравнения (2.9), $d_{n,m}^2$ определяется равенством (2.11).

Для неоднородного линейного уравнения с оператором L_1 с краевыми и начальными условиями, приведенными к однородным

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_1 v + v_0(r, \theta)\delta(t) + g_2(\theta, t)\delta(r - r_2) - g_1(\theta, t)\delta(r - r_1) + f(r, \theta, t) \equiv L_1 v + f_1,$$

где $\delta(r)$ — функция Дирака, решение можно представить через функцию Грина

$$v(r, \theta, t) = \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} G_1(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) f_1(\rho, \varphi, \tau) d\varphi \rho d\rho d\tau.$$

В случае нелинейных уравнений с операторами L_1, L_2 с нулевыми краевыми условиями и ненулевыми начальными условиями использование функции Грина G_1, G_2 приводит к нелинейным уравнениям следующего вида

$$v_j(r, \theta, t) = \int_0^t \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} G_j(r, \rho, \theta, \varphi, t, \tau) [N_j(v(\rho, \varphi, \tau)) + v_0(\rho, \varphi)\delta(\tau)] d\varphi \rho d\rho d\tau,$$

где $j = 1, 2$. Аналогичное уравнение справедливо для оператора L_3 . Далее задача с L_3 будет рассматриваться более подробно.

2.3. Анализ структур нелинейных уравнений для кольца

2.3.1. Бифуркация стационарных решений для кольца, асимптотическое представление

Далее исследованы решения из класса W_1 , которые бифурцируют из стационарного решения $u(r, \theta, t) = w = const$, принадлежащего классу W_0 , определяемых уравнением (1.6) (условие 1.1). Фиксируя гладкую ветвь, соответствующую одному из решений (1.6) $w = w(K, \gamma)$, $1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \neq 0$, проведем линеаризацию задачи (2.1)–(2.4) на выделенном решении $w(K, \gamma)$ из класса W_0 , выполняя замену $u = v + w$, получим задачу (2.5).

Действительная часть $\lambda_{n,m}^r$ (2.12) содержит параметры K, γ, w, D . В качестве бифуркационного параметра рассматривается коэффициент диффузии D , при этом параметр $\Lambda = -K\gamma \sin w$ считается фиксированным.

Раскладывая $f(Q_h v, w)$ в ряд и оставляя некоторое конечное число членов ряда, получаем набор модельных уравнений (1.8). Рассмотрим случай $Re\lambda_{n,m}^r \neq 0$ для одной из модельных задач (2.5):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v + \Lambda Qv + \Omega Qv^2 - \frac{\Lambda}{6} Qv^3, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t \geq 0, \quad (2.13)$$

с однородными условиями второго рода на границе, начальным условием $v(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta)$ и условием периодичности $v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t)$, $v \in \mathbb{R}$. Параметры Λ и Ω определяются равенствами (1.9).

Линеаризованное уравнение (2.13) представим в виде (2.7). Далее будем считать, что $h = \pi/3$ (аналогично можно рассмотреть другие случаи).

Согласно теореме 5.1.1 ([106]) и лемме 1.1, если $\Lambda > 1$ нулевое решение (2.13) неустойчиво для любых $D > 0$. Если $-1 < \Lambda < 1$, то нулевое решение (2.13) является асимптотически устойчивым для любых $D > 0$. Интерес представляет случай $\Lambda < -1$. Выберем теперь K так, чтобы выполнялось

условие:

Условие 2.1. $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Лемма 2.2. Для $h = \pi/3$, $Re\lambda_{n,m}^r \neq 0$, $Im\lambda_{n,m}^r = K\gamma \sin w \sin \frac{\pi n}{3} = 0$, оператору L_3 соответствует разложение в ряд по собственным функциям $\psi_{3s,m}(r, \theta) = R_{3s,m} \cos 3s\theta$, $s = 1, 2, \dots$ с собственными значениями

$$\lambda_{3s,m}^r = -D\lambda_{3s,m}^2 - 1 + (-1)^s \Lambda, \quad (2.14)$$

где $\lambda_{3s,m}^r$ — m -корень уравнения (2.9) при $n = 3s$.

Доказательство следует из общего случая (лемма 2.1) разложения линейного оператора L_3 , рассматриваемого в гильбертовом пространстве H , с областью определения H^2 , по полной ортонормированной системе собственных функций $\psi_{n,m}(r, \theta)$.

Обозначим

$$D_{s,m} = \frac{-1 - (-1)^s \Lambda}{\lambda_{3s,m}^2}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Если $D > D_{1,m}$, то согласно лемме нулевое решение задачи (2.13) является устойчивым. При убывании параметра D и его прохождении через значение $D_{1,m}$ одно собственное значение $\lambda_{3,m}^r$ меняет знак. Нулевое решение становится неустойчивым. Если $D_{2,m} < D < D_{1,m}$, то индекс неустойчивости нулевого решения задачи (2.13) равен 1. Индекс неустойчивости нулевого решения повышается на единицу при уменьшении D и его прохождении через $D_{s,m}$, $s = 2, 3, \dots$

Теорема 2. 1. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$ существует $\mu > 0$ такое, что при фиксированном значении $m = 1$ и для любых значений параметра D , удовлетворяющих неравенству $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$, существует решение $\varphi(r, \theta, D)$ задачи (2.13) из класса W_1 , определяемое равенством

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, D) = & zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2 P_6(r, D) \cos 6\theta + \\ & + z^3 P_9(r, D) \cos 9\theta + \xi(z, r, \theta, D) |_{z=z(D)}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$P_6(r, D) = \frac{\Omega\gamma_1}{2(2\lambda_{3,1}^r - \lambda_{6,1}^r) d_{6,1}^2} \cdot R_{6,1}(r),$$

$$P_9(r, D) = -\frac{1}{(3\lambda_{3,1}^r - \lambda_{9,1}^r) d_{9,1}^2} \left[\frac{\Omega^2 \gamma_1 \gamma_2}{(2\lambda_{3,1}^r - \lambda_{6,1}^r) d_{6,1}^2} + \frac{\gamma_4}{4} \right] \cdot R_{9,1}(r),$$

здесь $\xi(z, r, \theta, D) = O(|z|^4)$, $z(D) > 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_{3,1}^r(D)z + \frac{1}{d_{3,1}^2} \left[\frac{\Omega^2 \gamma_1^2}{2(2\lambda_{3,1}^r - \lambda_{6,1}^r) d_{6,1}^2} - \frac{3\gamma_4}{4} \right] z^3 + \dots, \quad (2.17)$$

где $R_{3s,1}$ и $d_{3s,1}^2$, $s = 1, 2, 3$ определяются равенствами (2.8) и (2.11) соответственно,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}(r) dr, & \gamma_2 &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^4(r) dr, \\ \gamma_3 &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}(r) R_{6,1}(r) R_{9,1}(r) dr, & \gamma_4 &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^3(r) R_{9,1}(r) dr. \end{aligned}$$

Решение $\varphi(r, \theta, D)$ — орбитально устойчиво.

Доказательство. Согласно теореме 5.1.1 ([106]) и лемме 1.1 интерес представляет случай $\Lambda < -1$. Выберем K так, чтобы выполнялось условие 2.1.

Если $D > D_{1,1}$, то согласно лемме 2.1 нулевое решение задачи (2.13) является устойчивым. При уменьшении значения параметра D и прохождении через первое критическое значение $D_{1,1}$ одно собственное значение $\lambda_{3,1}^r$, проходя через мнимую ось, становится положительным.

В окрестности $v = 0$ существует $\mu > 0$ такое, что для значений параметра D , удовлетворяющих неравенству $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$, существует центральное многообразие [106], представимое в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, D) &= z R_{3,1}(r) \cos 3\theta + \\ &+ \sum_{k=2}^N z^k P_{3k}(r, D) \cos 3k\theta + \xi(z, r, \theta, D) \Big|_{z=z(D)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $P_{3k}(r, D)$ ($k = \overline{2, N}$) — функции из пространства $H(S^r)$. Учитывая представление многообразия (2.18), уравнение (2.13) принимает вид

$$\dot{z} = \lambda_{3,1}^r(D)z + \sum_{k=2}^N z^k C_k. \quad (2.19)$$

Проведём доказательство для $N = 3$. Коэффициенты разложений (2.18) и (2.19) определим из равенства:

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_{3,1}^r(D)z + z^2C_2 + z^3C_3 \right) \times \\
& \times \left(zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + 2zP_6(r, D) \cos 6\theta + 3z^2P_9(r, D) \cos 9\theta \right) = \\
& = D \left(zR_{3,1}''(r) \cos 3\theta + z^2P_6''(r, D) \cos 6\theta + z^3P_9''(r, D) \cos 9\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{zR_{3,1}'(r) \cos 3\theta}{r} + \frac{z^2P_6'(r, D) \cos 6\theta}{r} + \frac{z^3P_9'(r, D) \cos 9\theta}{r} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{9zR_{3,1}''(r) \cos 3\theta}{r^2} - \frac{36z^2P_6''(r, D) \cos 6\theta}{r^2} - \frac{81z^3P_9''(r, D) \cos 9\theta}{r^2} \right) + \\
& + \Lambda \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, D) \cos 6\theta - z^3P_9(r, D) \cos 9\theta \right) + \\
& + \Omega \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, D) \cos 6\theta - z^3P_9(r, D) \cos 9\theta \right)^2 - \\
& - \frac{\Lambda}{6} \left(-zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2P_6(r, D) \cos 6\theta - z^3P_9(r, D) \cos 9\theta \right)^3.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

В силу ортогональности системы собственных функций $\cos 3s\theta$, $s = 1, 2, 3$ из (2.20). получим

$$\begin{aligned}
R_{3,1}(r) \left[z \left(\lambda_{3,1}^r + 1 + \Lambda \right) + C_2z^2 + C_3z^3 \right] = \\
= Dz \left(R_{3,1}''(r) + \frac{R_{3,1}'(r)}{r} - \frac{9R_{3,1}(r)}{r^2} \right) - \Omega z^3 R_{3,1}(r) P_6(r, D) + \frac{\Lambda z^3 R_{3,1}^3(r)}{8}.
\end{aligned}$$

Так как $R_{3,1}(r)$ — решение краевой задачи уравнения Бесселя (2.10), то

$$\begin{aligned}
R_{3,1}(r) \left[z \left(\lambda_{3,1}^r + 1 + \Lambda + \mu \lambda_{3,1}^2 \right) + C_2z^2 + C_3z^3 \right] = \\
= -\Omega z^3 R_{3,1}(r) P_6(r, D) + \frac{\Lambda z^3 R_{3,1}^3(r)}{8}.
\end{aligned}$$

Выражение при z равно нулю. Из (2.14) следует, что $C_2 = 0$,

$$C_3 = \frac{1}{d_{3,1}^2} \left(-\Omega \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) P_6(r, D) dr + \frac{\Lambda \gamma_1}{8} \right),$$

где $\gamma_1 = \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^4(r) dr$, $P_6(r, \mu) = \frac{\gamma_2 \Omega R_{6,1}(r)}{2d_{6,1}^2 (2\lambda_{3,1}^r - \lambda_{6,1}^r)}$.

Исходя из условия 2.1 и равенства (2.14), $C_3 < 0$, тогда имеет место суперкритическая бифуркация типа "вилка" (см. [106], гл. 6. 3) и от тривиального решения уравнения (2.17) ответвляются две устойчивые непрерывные по параметру D ветви стационарных точек из класса W_1 .

Проводя аналогичные выкладки для $s = 2, 3$, получим утверждение теоремы.

Таким образом, в некоторой окрестности $D_{1,1}$ существует стационарное решение $v = \varphi(r, \theta, D)$ из класса W_1 уравнения (2.13), определяемое равенством (2.16). Решение $\varphi(r, \theta, D)$ — орбитально устойчиво. □

Для доказательства теоремы использован метод центральных многообразий. Теорема 2.1 имеет место только в левой полуокрестности критического значения бифуркационного параметра $D = D_{1,1}$.

Используя пакет символьных вычислений Wolfram Mathematica, построены приближенные стационарные решение $\varphi(r, \theta, D)$ из класса W_1 задачи (2.13), определяемые равенством (2.16), для $\Lambda = -3/2$ и $D = 0, 1; 0, 01$ (см. рисунок 2.1).

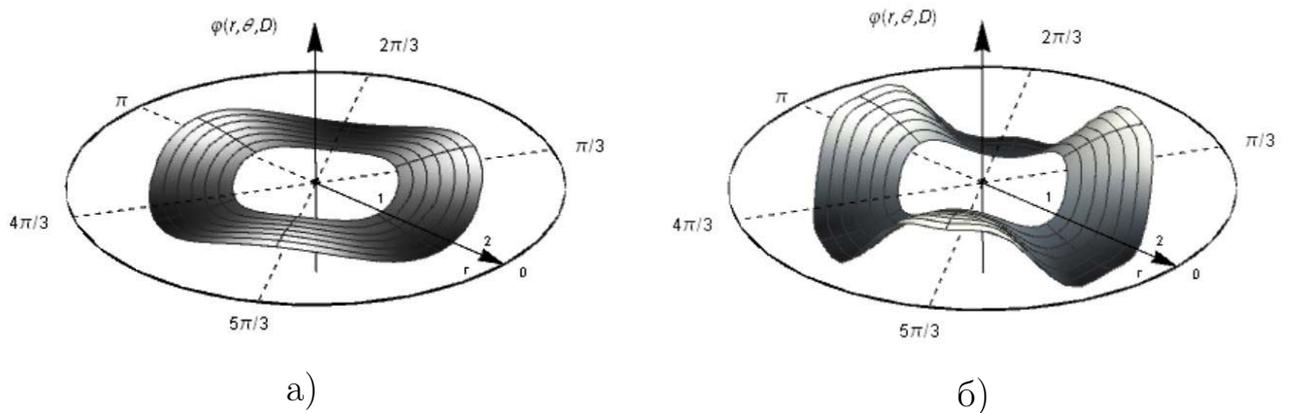


Рис. 2.1: Приближенные решение (2.16) для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$: а) при $D = 0, 1$; б) при $D = 0, 01$.

2.3.2. Галеркинские аппроксимации неоднородных в пространстве стационарных решений для кольца

Для построения приближенных решений при значениях бифуркационных параметров, отходящих от критических значений, использованный выше в доказательстве теоремы 2.1 метод центральных многообразий дополняется согласованным с ним методом Галеркина.

Для того чтобы провести исследование асимптотики стационарных решений модельной задачи (2.13) при уменьшении значения параметра D и его отходе от критического значения, в соответствии с методом Галеркина приближенные решения представим в виде

$$\varphi^*(r, \theta, D) = \sum_{n=1}^N (z_n \exp[in\theta] + \bar{z}_n \exp[-in\theta]) R_{n,1}(r), \quad (2.21)$$

здесь z_n, \bar{z}_n — комплексно сопряженные выражения, $R_{n,m}(r) = R(\lambda_{n,m}r)$ определяются равенством (2.8) $\lambda_{n,m}$ — корни уравнения (2.9). Функции $R(r) = R_{n,m}(r)$ являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя (2.10).

Так как функция $\varphi^*(r, \theta, D)$ должна удовлетворять уравнению (2.13), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_n = \lambda_{n,1}^r z_n + \sigma_n(z, \bar{z}), \quad \dot{\bar{z}}_n = \overline{\lambda_{n,1}^r} \bar{z}_n + \bar{\sigma}_n(z, \bar{z}), \quad (2.22)$$

где $\lambda_{n,1}^r(D) = -1 - D\lambda_{n,1}^2 + \exp[inh]\Lambda$, $\overline{\lambda_{n,1}^r}(D) = -1 - D\lambda_{n,1}^2 + \exp[-inh]\Lambda$, $\sigma_n(z(D), \bar{z}(D)), \bar{\sigma}_n(z(D), \bar{z}(D))$ — формы третьей степени относительно z_n, \bar{z}_n , $n = 1, 2, \dots, N$.

Системы (2.22) имеют нулевое решение, устойчивость которого определяется спектром $\lambda_{n,1}^r(D), \overline{\lambda_{n,1}^r}(D)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствующей матрицы устойчивости.

Как и выше будем считать, что выполняется условие 2.1 и как в [125] $h = \pi/3$, тогда критическое значение бифуркационного параметра, при котором нулевое стационарное решение системы (2.22) теряет устойчивость, $D^* = \frac{-\Lambda - 1}{\lambda_{3,1}^2}$. В результате реализуется суперкритическая бифуркация типа "вилка" и при прохождении $D = D^*$ рождается пара устойчивых ста-

ционарных точек $\pm z^*(D) = \{0, 0, \pm z_3^*, 0, 0, \pm z_6^*, \dots\}$, являющихся решениями алгебраической системы уравнений

$$\lambda_{n,1}^r z_n + \varepsilon_n(z_l) = 0, \quad n, l = 1, 2, \dots, N, \quad (2.23)$$

где $\varepsilon_n(z_l)$ — полином третьей степени. Учитывая (2.21), стационарное решение из класса W_1 задачи (2.13) определяется асимптотическим равенством

$$\varphi^*(r, \theta, D) = \sum_{k=1}^{[N/3]} z_{3k}(D) \cos[3k\theta] R_{3k,1}(r). \quad (2.24)$$

Например, при $N = 3$ решение $z^*(D)$ определяется системой

$$\begin{aligned} \lambda_{3,1}^r z_1 + \frac{1}{8d_3^2} [\Lambda (\beta_3 z_1^3 + 2\delta_{36} z_2^2 z_1 + 2\delta_{39} z_3^2 z_1 + \zeta_{39} z_1^2 z_3 + \xi_{639} z_2^2 z_3) - \\ - 8\Omega z_2 (\delta_{369} z_3 + \xi_{36} z_1)] = 0, \\ \lambda_{6,1}^r z_2 + \frac{1}{8d_6^2} [-\Lambda z_2 (\beta_6 z_2^2 + 2\delta_{36} z_1^2 + 2\delta_{69} z_3^2 + 2\xi_{639} z_1 z_3) + \\ + \Omega z_1 (8\delta_{369} z_3 + 4\xi_{36} z_1)] = 0, \\ \lambda_{9,1}^r z_3 + \frac{1}{24d_9^2} [3\Lambda (\beta_9 z_3^3 + 2\delta_{39} z_1^2 z_3 + 2\delta_{69} z_2^2 z_3 + \zeta_{39} \Lambda z_1^3 + \xi_{639} z_2^2 z_1) - \\ - 24\delta_{369} \Omega z_2 z_1] = 0, \end{aligned}$$

где $d_{n,1}^2$ задается равенством (2.11),

$$\begin{aligned} \beta_k &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{k,1}^4(r) dr, \quad k = 3, 6, 9; \\ \delta_{kl} &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{k,1}^2(r) R_{l,1}^2(r) dr, \quad k, l = 3, 6, 9 \quad (k < l); \\ \zeta_{39} &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^3(r) R_{9,1}(r) dr, \quad \xi_{36} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}(r) dr, \\ \delta_{369} &= \int_{r_1}^{r_2} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}^2(r) R_{9,1}^2(r) dr, \quad \xi_{639} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{6,1}^2(r) R_{3,1}(r) R_{9,1}(r) dr. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. При выполнении условий 1.1 и 2.1 для $h = \pi/3$ существует непрерывное по D стационарное решение $\varphi^*(r, \theta, D)$ уравнения (2.13) из класса W_1

$$\varphi^*(r, \theta, D) = \sum_{k=1}^{[N/3]} z_{3k}(D) \cos[3k\theta] R_{3k,1}(r), \quad (2.26)$$

где $z_{3k}(D)$ при $N = 3$ определяется системой (2.24).

Описанный процесс может быть продолжен.

В пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica 11.3 были проведены численные эксперименты для различных значений N , в частности, для $N = 9$ при фиксированных значениях параметров $K = 2$, $\gamma = 0.761058$, $w = 1.74147$, которым соответствуют $\Lambda = -3/2$, $\Omega = 0.129264$. Получены следующие результаты.

1. Критическое значение бифуркационного параметра $D^* \approx 0.113315$.
2. При $D > D^*$ нулевое решение системы (2.23) устойчиво.
3. При уменьшении параметра D и прохождении критического значения D^* одно собственное значение спектра матрицы устойчивости нулевого решения $\lambda_{3,1}^r$ проходит через мнимую ось и становится положительным. В результате происходит бифуркация типа "вилка" и от теряющего устойчивость нулевого решения ответвляется две устойчивые непрерывные по параметру D ветви стационарных точек.
4. При дальнейшем уменьшении параметра D собственное значение $\lambda_{3,1}^r$ остается положительным.
5. Спектр матрицы устойчивости решения $z^*(D)$ лежит на отрицательной полуоси.

Построены полученные с применением метода Галеркина приближенные решения $\varphi^*(r, \theta, D)$, определяемые равенством (2.24) (см. рисунок 2.2).

Таким образом, наличие поворота пространственного аргумента моделирует ситуацию, когда однородное в пространстве стационарное решение при изменении параметров (D, K) в задаче (2.13) теряет устойчивость и происходит рождение неоднородного в пространстве стационарного решения.

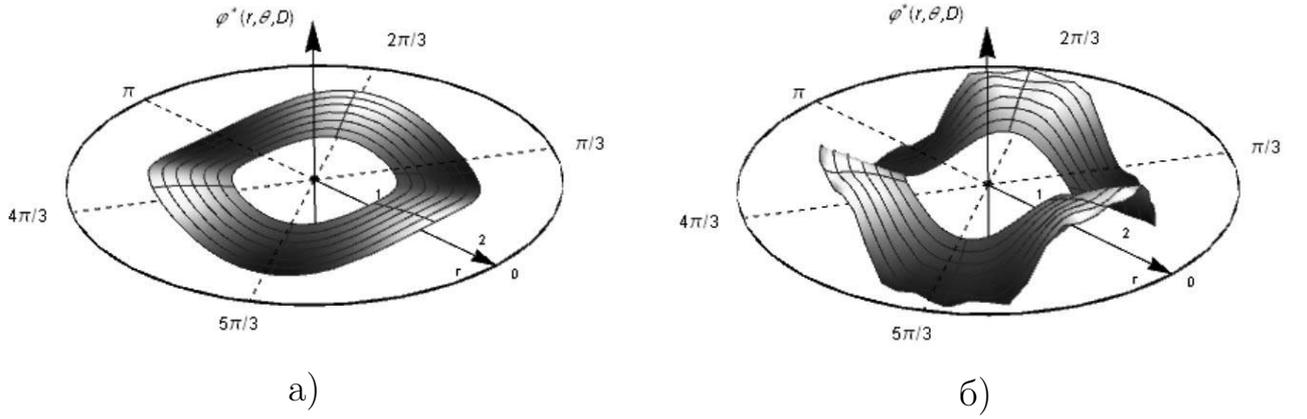


Рис. 2.2: Приближенные решение (2.16) для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$: а) при $D = 0, 1$; б) при $D = 0, 01$

2.4. Бифуркация вращающихся структур в уравнении на кольце с операторами поворота и сжатия

В кольце S^r для случая комбинации операторов поворота и радиально-го сжатия рассматривается начально-краевая задача (2.1) с краевыми условиями Неймана на границе $\partial(S^r)$ $\left(\frac{\partial u(r_1, \theta, t)}{\partial r} = \frac{\partial u(r_2, \theta, t)}{\partial r} = 0 \right)$ и начальным условием $u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta)$. Здесь оператор Q определяется равенством $Qu(r, \theta, t) = u(\kappa r, \theta + h, t)$, где $0 < \kappa < 1$. Рассмотрим данную задачу при выполнении следующего условия (аналогично [97]).

Условие 2.2. $\Lambda < \kappa^{-1}$.

Линеаризуем уравнение (2.1) на выбранном решении w из класса W_0 , определяемом условием 1.1. Задача (2.1), с выделенным линейным оператором $L(D, K)$ и нелинейным оператором $N(Qv)$, имеет вид (2.7).

В лемме 2.1 определены собственные функции и соответствующие им собственные значения оператора $L(D, K)$. Считая бифуркационными параметрами D и K , определим их критические значения, исходя из леммы 2.1. Потребуем, чтобы выполнялось условие.

Условие 2.3. Существуют $n \in \mathbb{Z}_+$, действительные положительные \widehat{D}, \widehat{K} , $\omega_0 \neq 0$ такие, что выполняется равенство

$$-\widehat{D}\lambda_{n,m}^2 - 1 - \widehat{K}\gamma \sin w \exp[inh]\delta_{n,m} = -i\omega_0,$$

где $\delta_{n,m} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{n,m}(r) R_{n,m}(\kappa r) dr$.

Используя равенства $D = \widehat{D} + \mu$, $K = \widehat{K} + \nu$, перейдем к параметрам μ и ν . Получим

$$\lambda_{n,m}^r(\mu, \nu) = -(\widehat{D} + \mu)\lambda_{n,m}^2 - 1 - (\widehat{K} + \nu)\gamma \sin w \exp[inh]\delta_{n,m}. \quad (2.27)$$

Пусть выполняются следующие условия.

Условие 2.4.

1. Необходимое условие бифуркации устойчивых структур: $Re\lambda_{n,1}^r(0, 0) \leq 0$ для любого целого n ;

2. Условие, определяющее Хопф-Хопф бифуркацию: при $\mu = 0$, $\nu = 0$, существует ровно две пары собственных значений $\lambda_{\pm n_1,1}^r$, $\lambda_{\pm n_2,1}^r$, для которых $Re\lambda_{\pm n_i,1}^r = 0$, $i = 1, 2$.

3. Условие регулярности: $\det \frac{\partial(Re\lambda_{n_1,1}^r, Re\lambda_{n_2,1}^r)}{\partial(\mu, \nu)} \neq 0$.

Так как $\Lambda < -\kappa^{-1}$, то $\sin \widehat{w} > 0$.

В пространстве $L_2^r(S^r)$ определим линейный оператор L_n :

$$L_n f = D\Delta f - f + \exp[inh]\Lambda \widehat{Q}f,$$

где $\widehat{Q}f(r) = f(\kappa r)$. Его область определения

$$\mathfrak{D}(L_n) = \{f \in L_2^r(S_r) : L_n f \in L_2^r(S_r), f'(r_1) = f'(r_2) = 0\}.$$

В $L_2^r(S^r)$ введем преобразование \widehat{Q}^* :

$$\widehat{Q}^* f(r) = \begin{cases} \kappa^{-2} f(\kappa^{-1}r), & r_1 \leq r \leq \kappa r_2; \\ 0, & \kappa r_2 < r \leq r_2. \end{cases}$$

Оператор L_n^* , сопряженный оператору L_n , имеет область определения $\mathfrak{D}(L_n^*) = \mathfrak{D}(L_n)$. Справедливо равенство

$$L_n^* f = D\Delta f - f + \exp[inh]\Lambda \widehat{Q}^* f.$$

Любая собственная функция оператора $L(0, 0)$ представима в виде $\exp[in\theta]R_{n,m}(r)$, $n \in \mathbb{Z}$, $R_{n,m}(r)$ — собственная функция оператора L_n . Следовательно,

$$L(0, 0) \exp[in\theta]R_{n,m}(r) = \exp[in\theta]L_n R_{n,m}(r).$$

По условию 2.4 существует $s \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$L(0, 0) \exp[is\theta]R_{n,m}(r) = -i\omega_0 \exp[is\theta]R_{n,m}(r),$$

где $R_{n,m}(r)$ собственная функция оператора L_s , соответствующая собственному значению $\lambda_{1,1}^r(0, 0) = -i\omega_0$. Выберем $R_{n,m}$ согласно условию нормировки (см. лемму 2.1 для кольца) $\langle R_{n,m}; R_{n,m} \rangle = 1$, здесь обозначено $R_{n,m} := R_{n,m} d_{n,m}^{-1}$. Пусть $R_{n,m}^*$ собственная функция оператора L_s^* , соответствующая собственному значению $i\omega_0$ и нормированная следующим образом $\langle R_{n,m}^*; R_{n,m} \rangle = 1$.

Критическим пространством оператора $L(0, 0)$, очевидно, является двумерное евклидово пространство $H_0 = \{z \exp[is\theta]R(r) + \bar{z} \exp[-is\theta]R(r)\}$, где $z \in \mathbb{C}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$$\text{Обозначим } V(z) = z \exp[is\theta]R_{n,m}(r) + \bar{z} \exp[-is\theta]R_{n,m}(r).$$

Используя одночастотный метод Боголюбова-Митропольского [26] в сочетании с формализмом построения центральных многообразий S^r -эквивариантных уравнений, представляем решение уравнения (2.13) в виде

$$\begin{aligned} v = & (z \exp[is\theta] + \bar{z} \exp[-is\theta])R_{n,m}(r) + p_2(z \exp[is\theta], \bar{z} \exp[-is\theta], r, \mu, \nu) + \\ & + p_3(z \exp[is\theta], \bar{z} \exp[-is\theta], r, \mu, \nu) + \dots, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где z определяется из уравнения

$$z_t = \lambda_{n,1}^r(\mu, \nu)z + C_1(\mu, \nu)z^2\bar{z} + \dots \quad (2.29)$$

p_2, p_3 — формы второй и третьей степеней относительно $z \exp[is\theta]$, $\bar{z} \exp[-is\theta]$, символ «...» обозначает слагаемые, имеющие более высокий порядок мало-

сти по параметрам μ, ν . Представим p_2 и p_3 как в [14]

$$p_2 = \frac{1}{2}P_{2,0}Z^2 + P_{1,1}Z\bar{Z} + \frac{1}{2}P_{0,2}\bar{Z}^2,$$

$$p_3 = \frac{1}{6}P_{3,0}Z^3 + \frac{1}{2}P_{2,1}Z^2\bar{Z} + \frac{1}{2}P_{2,1}Z^2\bar{Z} + \frac{1}{6}P_{0,3}\bar{Z}^3,$$

где $Z = z \exp[is\theta]$, $\bar{Z} = \bar{z} \exp[-is\theta]$. Для определения p_2, p_3 подставим (2.28) и (2.29) в (2.13). При $\mu = 0, \nu = 0$ находим коэффициенты форм p_2, p_3 :

$$P_{2,0}(r) = \frac{2\Omega \exp[2ihs] \langle R_{2s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1})^2 \rangle}{(2\lambda_{s,1}^r - \lambda_{2s,1}^r)} R_{2s,1}, \quad P_{0,2}(r) = \overline{P_{2,0}},$$

$$P_{1,1}(r) = \frac{4\Omega \exp[ihs] \langle R_{s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1})^2 \rangle}{\exp[ihs] \langle R_{s,1}, R_{s,1} \rangle (\lambda_{s,1}^r + \overline{\lambda}_{s,1}^r) + \Lambda(-1 + \exp[ihs])^2} R_{s,1}.$$

Аналогично, находим $P_{3,0}$ и $P_{0,3} = \overline{P_{3,0}}$:

$$P_{3,0}(r) = \frac{1}{(2\lambda_{s,1}^r - \lambda_{2s,1}^r)(3\lambda_{s,1}^r - \lambda_{3s,1}^r)} \left[\exp[3ihs] \Lambda(2\lambda_{s,1}^r - \lambda_{2s,1}^r) \times \right.$$

$$\times \langle R_{3s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1})^3 \rangle + 12\Omega^2 \exp[2ihs] \langle R_{2s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1})^2 \rangle \times$$

$$\left. \times \langle R_{3s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1} \widehat{Q}R_{2s,1}) \rangle \right] R_{3s,1},$$

где $\delta_{3s,s,2s} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{3s,1}(r) R_{s,1}(\kappa r) R_{2s,1}(\kappa r) dr$.

Для определения функции $P_{2,1}$ получаем равенство

$$C_1 R_{s,1}(r) - \frac{1}{2} \Lambda \exp[ihs] R_{s,1}(\kappa r)^3 - 2 \exp[ihs] P_{1,1}(\kappa r) R_{s,1}(\kappa r) -$$

$$- \Omega \exp[ihs] P_{2,0}(\kappa r) R_{s,1}(\kappa r) - \frac{1}{2} \Lambda \exp[ihs] P_{2,1}(\kappa r) + \frac{\mu s^2 P_{2,1}(r)}{2r^2} - \quad (2.30)$$

$$- \frac{\mu P'_{2,1}(r)}{2r} - \frac{1}{2} \mu P''_{2,1}(r) + \lambda_{s,1}^r P_{2,1}(r) = 0.$$

Условие $\langle R_{n,m}^*, p \rangle = 0$, где p — свободный член уравнения (2.30), является необходимым и достаточным условием его разрешимости. Отсюда, учитывая найденные ранее P_{11}, P_{20} , определяем $C_1 = C_1(0, 0)$:

$$C_1 = \frac{\exp[ihs]}{2(\lambda_{s,1}^r - \lambda_{2s,1}^r)} \left[(2\lambda_{s,1}^r - \lambda_{2s,1}^r) \left(4\Omega \langle R_{s,1}^*, (\widehat{Q}P_{1,1} \widehat{Q}R_s) \rangle + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \Lambda \langle R_{s,1}^*, (\widehat{Q}R_{s,1})^3 \rangle + 4\Omega^2 \exp[2ihs] \langle R_{2s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1})^2 \rangle \langle R_{s,1}^*, (\widehat{Q}R_{s,1} \widehat{Q}R_{2s,1}) \rangle \right) \right].$$

Следовательно,

$$P_{21} = \frac{1}{\lambda_s^r} \left[\frac{4\Omega^2 \exp[3ihs] \langle R_{2s,1}, \widehat{Q}R_{s,1} \rangle \langle R_{s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1} \widehat{Q}R_{2s,1}) \rangle}{(2\lambda_{s,1}^r - \lambda_{2s,1}^r)} + \right. \\ \left. + 4\Omega \exp[ihs] \langle R_{s,1}, (\widehat{Q}P_{1,1} \widehat{Q}R_{s,1}) \rangle - 2C_3 + \Lambda \exp[ihs] \langle R_{s,1}, (\widehat{Q}R_{s,1})^3 \rangle \right] R_{s,1}.$$

Таким образом, как и в [14], существует единственное с точностью до сдвига по t периодическое решение (2.29)

$$z = \left(\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda_{1,1}^r(0,0)}{\operatorname{Re}C_1} \nu \right)^{1/2} + O(\mu, \nu) \right) \exp[i\omega(\mu, \nu)t],$$

где

$$\omega(\mu, \nu) = \omega_0 + \operatorname{Im} \left(\exp[ihs] \langle R_{s,1}^*, \widehat{Q}R_{s,1} \rangle \left(\gamma (\widehat{K} + \nu) \sin w(\nu) - \right. \right. \\ \left. \left. - \widehat{K} \gamma \sin \widehat{w} \right) \right) + \operatorname{Im} C_1 \nu \frac{\operatorname{Re}\lambda_{1,1}^r(0,0)}{\operatorname{Re}C_1} + O(\nu^{3/2}). \quad (2.31)$$

Имеет место следующая теорема (аналогичная теореме 5 в [14]).

Теорема 2.3. При выполнении условий 1.1, 2.2, 2.3 и $\operatorname{Re}C_1 < 0$ существуют $\mu_0 > 0$, $\nu_0 > 0$ такие что для любых значений параметров μ и ν , удовлетворяющих неравенствам $0 < \mu < \mu_0$, $-\nu_0 < \nu < 0$, решение $w(\nu) = w(\widehat{K} + \nu)$ задачи (2.13) экспоненциально устойчиво. Для μ и ν , удовлетворяющих неравенствам $-\mu_0 < \mu < 0$, $0 < \nu < \nu_0$, решение $w(\nu)$ задачи (2.13) неустойчиво и задача (2.13) имеет периодическое по t решение $u_s = w(\nu) + v(\omega(\mu, \nu)t + s\theta, r, \mu, \nu)$, где

$$v = 2 \left(\frac{\nu \operatorname{Re}\lambda_{1,1}^r}{\operatorname{Re}C_1} \right)^{1/2} R_{1,1}(r) \operatorname{Re} \exp[i(\omega(\nu)t + s\theta)] + \\ + \frac{\nu \operatorname{Re}\lambda_{1,1}^r}{\operatorname{Re}C_1} \Lambda \operatorname{ctg} \widehat{w} \left[-L_0^{-1} \langle \widehat{Q}R_{1,1}, \widehat{Q}R_{1,1} \rangle (r) + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \exp[2i(\omega(\nu)t + s\theta)] (2i\omega_0 - L_{2s})^{-1} \langle \widehat{Q}RR_{1,1}, \widehat{Q}RR_{1,1} \rangle (r) \right] + O(\nu^{3/2}),$$

где $\omega(\mu, \nu)$ определяется равенством (2.31)

Решение v — экспоненциально устойчиво.

2.5. Двухмодовая аппроксимация вращающихся структур
в уравнении на кольце с оператором инволюции

В кольце S^r для задачи (2.13) с оператором поворота (оператором инволюции) построим двухмодовую аппроксимацию вращающихся структур типа "бегущая волна" которые ответвляются в результате бифуркации Андронова-Хопфа при наибольшем критическом значении параметра $D = \{D^* : \text{Re}\lambda(D^*) = 0\}$ (2.15) из теряющего колебательным образом устойчивость нулевого решения системы (2.22).

Для построения воспользуемся методом Галеркина, который согласован с рассмотренным выше методом центральных многообразий. В искомом решении, определяемом равенством (2.21), будем считать, что

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \rho_1 \exp[i\theta_1], \quad z_2(t) = 0, \quad z_3(t) = \rho_3 \exp[i(3\theta_1 + \alpha_3)], \\ \bar{z}_1(t) &= \rho_1 \exp[-i\theta_1], \quad \bar{z}_2(t) = 0, \quad \bar{z}_3(t) = \rho_3 \exp[-i(3\theta_1 + \alpha_3)], \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $\rho_k = \rho_k(t, D) > 0$, $\theta_k = \theta_k(t, D)$, $k = 1, 3$; $\theta_1(t, D) = \omega(D)t$.

Подставим (2.32) в (2.22), получим систему для определения ρ_k, α_3 :

$$\begin{aligned} \rho_1(\lambda_1^* d_{1,1}^2 - i\omega) - \frac{1}{2}\Lambda \exp[ih] [\xi_{13} \exp[i\alpha_3] \rho_3 \rho_1^2 - \beta_1 \rho_1^3 - 2\delta_{13} \rho_3^2 \rho_1] &= 0, \\ \rho_1(\hat{\lambda}_1^* d_{1,1}^2 + i\omega) - \frac{1}{2}\Lambda \exp[-ih] [\xi_{13} \exp[-i\alpha_3] \rho_3 \rho_1^2 - \beta_1 \rho_1^3 - 2\delta_{13} \rho_3^2 \rho_1] &= 0, \\ \rho_3(\lambda_3^* d_{3,1}^2 - 3i\omega) - \frac{1}{6}\Lambda \exp[3ih] [\xi_{13} \exp[-i\alpha_3] \rho_1^3 - 3\beta_3 \rho_3^3 - 6\delta_{13} \rho_3 \rho_1^2] &= 0, \\ \rho_3(\hat{\lambda}_3^* d_{3,1}^2 + 3i\omega) - \frac{1}{6}\Lambda \exp[-3ih] [\xi_{13} \exp[i\alpha_3] \rho_1^3 - 3\beta_3 \rho_3^3 - 6\delta_{13} \rho_3 \rho_1^2] &= 0, \end{aligned}$$

здесь $d_{k,1}^2 (k = 1, 3)$ определяется равенством (2.11), $\beta_k (k = 1, 3)$, δ_{13} определяются равенствами (??), $\xi_{13} = \int_{r_1}^{r_2} r R_{1,1}^3(r) R_{3,1}(r) dr$.

При $D > D^*$ система имеет только нулевое ($\rho_1 = 0, \rho_3 = 0$) устойчивое решение. При уменьшении значения параметра D и прохождении критического значения D^* нулевое решение меняет характер устойчивости (становится

неустойчивым) и при этом происходит рождение решения вида:

$$\begin{aligned}\rho_1^2(D) &= \frac{6\Psi_3^c}{\Lambda(\Psi_1^c(3\gamma_1(\Psi_3^c)^2 - 4\delta_{13}\Psi_3^c - \gamma_3\Psi_1^c))} \left[\omega(3\omega \sin 4h + d_3^2\Upsilon_{13}^c) + \right. \\ &\quad \left. + (d_{1,1}^2(3\omega\Upsilon_{31}^c + d_{3,1}^2(\Lambda \sin 3h(1 + D\lambda_{3,1}^2) - \Upsilon^s(1 + D\lambda_{1,1}^2))) \right], \\ \sin^2 \alpha_3(D) &= -\frac{12\Psi_1^c\Psi_3^c}{\Lambda^2\xi_{13}^2\rho_1(D)^4}, \\ \cos \alpha_3(D) &= \frac{\sin \alpha_3(D)(\gamma_1\Lambda\rho_1^2(t) - 2d_1^2\Lambda)\Psi^s}{2\Psi_1^c} + \frac{4\delta_{13}\Psi_1^c}{\Lambda\xi_{13}^2 \sin \alpha_3(D)\rho_1^2(t)}, \\ \rho_3(D) &= \frac{-2\Psi_1^c}{\Lambda\xi_{13} \sin \alpha_3(D)\rho_1(D)},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi_k^c &= k\omega \cos(kh) - d_{k,1}^2 \sin(kh)(D\lambda_{k,1}^2 + 1), \quad k = 1, 3, \\ \Psi^s &= \omega \sin h + d_{1,1}^2 \cos h(D\lambda_{1,1}^2 + 1), \\ \Upsilon_{jk}^c &= -\Lambda \cos jh + \cos 4h(D\lambda_{k,1}^2 + 1), \quad (j, k = 1, 3, j \neq k), \\ \Upsilon^s &= -\Lambda \sin h + \sin 4h(D\lambda_{3,1}^2 + 1),\end{aligned}$$

значение ω определяется из основного тригонометрического тождества для $\alpha_3(D)$, знак $\sin \alpha_3(D)$ выбирается противоположным знаком Ψ_1^c .

Следовательно, система (2.22) при $D < D^*$ имеет решение

$$\begin{aligned}z_1(t, D) &= \rho_1(D) \exp[i\theta_1(D)t], \quad \bar{z}_1(t, D) = \rho_1(D) \exp[-i\theta_1(D)], \\ z_2(t, D) &= 0, \quad z_3(t, D) = \rho_3(D) \exp[i(3\theta_1(D)t + \alpha_3(D))], \\ \bar{z}_2(t, D) &= 0, \quad \bar{z}_3(t, D) = \rho_3(D) \exp[-i(3\theta_1(D)t + \alpha_3(D))].\end{aligned}\tag{2.33}$$

Подставив (2.33) в (2.21), получим периодическое решение $\varphi^*(r, \theta, t, D)$ задачи (2.13).

Указанное решение рождается устойчивым.

Численное моделирование проводилось для $h = \frac{2\pi}{3}$ при фиксированных значениях параметров $\Lambda = -3/2$, $\Omega = 0.129264$, которые соответствуют параметрам $K = 2$, $\gamma = 0.761058$, $w = 1.74147$ исходной задачи. В пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica 11.3 для различных значений бифуркационного параметра D при $N = 5$ были построены галеркинские аппроксимации периодических решений $\varphi^*(r, \theta, t, D)$ (см. рисунок 2.3).

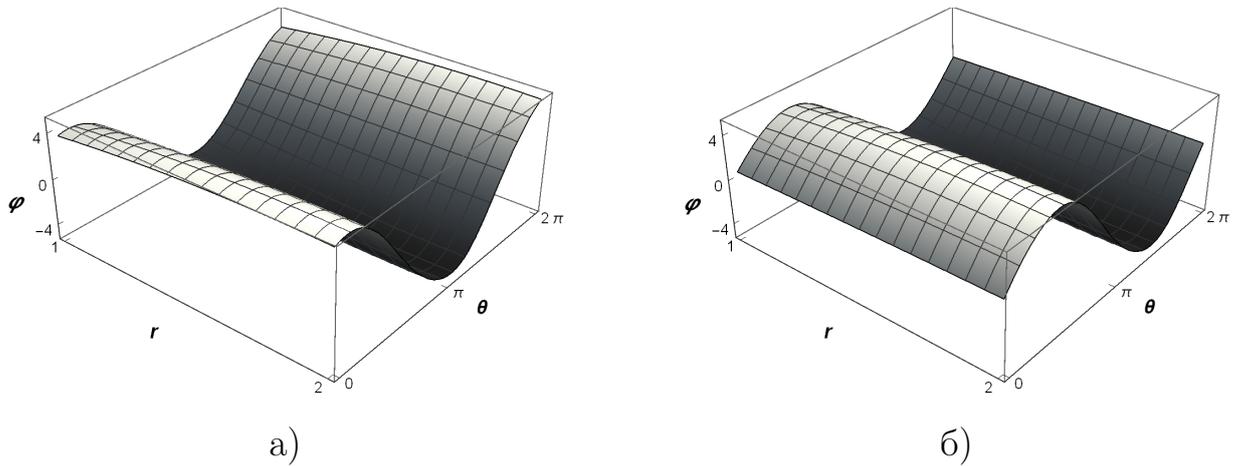


Рис. 2.3: Приближенное решение (2.21) типа "бегущая волна" полученное с применением метода Галеркина, для $\Lambda = -3/2$, $D = 0,02$: а) при $t = 1$; б) при $t = 5$.

Выводы к главе 2

В главе 2 исследована математически формализованная модель ФДУ с нелинейностью до третьего порядка, представляющая собой начально краевую задачу с условиями Неймана на границе и условием периодичности для уравнения параболического типа с операторами поворота, радиального сжатия на кольце.

Проведен анализ существования, формы и устойчивости неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений, бифурцирующих из некоторых однородных в пространстве стационарных решений указанной задачи.

Для начально-краевой задачи ФДУ параболического типа с операторами поворота и радиального сжатия пространственных аргументов, с краевым условием Неймана и условием 2π -периодичности, рассматриваемой на кольце, доказаны утверждения о существовании, асимптотической форме и характере устойчивости стационарных решений из класса W_1 и периодических по времени решений, которые бифурцируют от некоторого решения из класса W_0 в результате изменения характера его устойчивости.

Получены следующие результаты.

1. В окрестности критического значения бифуркационного параметра сформулирована и доказана методом центральных многообразий теорема о

существовании и асимптотической форме стационарного решения из класса W_1 параболического уравнения с оператором поворота, которое рождается в результате бифуркации из меняющего характер устойчивости решения из класса W_0 .

2. Используя результаты применения метода центральных многообразий и согласованного с ним формального построения решения методом Галеркина, найдено асимптотическое представление для стационарных решений из класса W_1 параболического ФДУ с оператором поворота на кольце, проведен анализ их динамики в зависимости от значений параметра D .

3. В окрестности критических значений бифуркационных параметров D и K сформулирована и доказана методом центральных многообразий теорема о существовании и асимптотической форме периодического по времени решения параболического уравнения с оператором поворота и радиального сжатия, которое рождается в результате бифуркации Андронова-Хопфа из меняющего характер устойчивости пространственно-однородного решения.

4. Используя результаты применения метода центральных многообразий и согласованного с ним формального построения решения методом Галеркина, построена двухмодовая аппроксимация периодического по времени решения параболического ФДУ с оператором поворота, описана его динамика в зависимости от значений бифуркационного параметра D .

5. Проведенные с применением пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 11.3 численные эксперименты показали, что применение формализма метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий, качественно и количественно приводит к верным результатам.

ГЛАВА 3. Структуры решений с оператором поворота на круге и окружности

В данной главе исследуются модели с кубической нелинейностью (1.8) с краевыми условиями Неймана для круга S^c и условиями периодичности для окружности S^1 . Для других краевых условий и нелинейностей более высокого порядка схема исследований остается прежней, но выкладки становятся более громоздкими. Конкретизация задач позволяет получать новые сценарии поведения решений в зависимости от бифуркационных параметров D и K (периодические по времени решения, метаустойчивые структуры и др.).

3.1. Анализ структур нелинейных уравнений для круга

3.1.1. Бифуркация неоднородного в пространстве стационарного решения для круга, асимптотическое представление

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= L(D, K)v + N(Qv), \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= 0, \quad u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta), \quad (r, \theta) \in S^c, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $L(D, K) = D\Delta v - v - K\gamma \sin wQ_h v$, $N(Qv) = f(Q_h v, w)$. Используя метод Фурье, для оператора $L(D, K)$ в пространстве $H(S^c)$ с областью определения $H^2(S^c)$ доказана лемма.

Лемма 3.1. Оператор $L(D, K)$ на круге S^c имеет полную в пространстве $H(S^c)$ ортонормированную систему собственных функций

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(r, \theta) &= J_n(\lambda_{n,m}r) \exp[in\theta], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, \\ L(D, K)\psi_{n,m}(r, \theta) &= (-1 - D\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh])\psi_{n,m}(r, \theta), \end{aligned}$$

где $J_n(r)$ функции Бесселя первого рода порядка n (2.1), $\lambda_{n,m}$ — упорядоченные по возрастанию корни уравнения $J'_n(\tilde{\lambda}r_0) = 0$. Функции

$$R(r) = R_{n,m}(r) = J_n(\lambda_{n,m}r) \quad (3.2)$$

являются решениями краевой задачи для уравнения Бесселя

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\tilde{\lambda}^2 r^2 - n^2) R(r) = 0, \quad R'(r_0) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Собственные значения для оператора $L(D, K)$:

$$\lambda_{n,m}^c = -1 - D\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[inh], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

В зависимости от значений действительной и мнимой частей $\lambda_{n,m}^c$ могут быть реализованы различные типы решений, бифурцирующие из решения класса W_0 . Если $Re\lambda_{n,m}^c \neq 0, Im\lambda_{n,m}^c = 0$, то от решения из класса W_0 , бифурцируют решения из класса W_1 , если $Re\lambda_{n,m}^c = 0, Im\lambda_{n,m}^c \neq 0$, то происходит бифуркация периодических по времени решений.

Пусть $u = w(K, \gamma) = const$ — решение задачи (3.1) из класса W_0 , удовлетворяющее условию 1.1. В главе показано, что в окрестности w , выполняя замену $u(r, \theta, t) = w + v(r, \theta, t)$, где $v(r, \theta, t)$ — новая неизвестная функция, относительно v получаем задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v - K\gamma \sin w \cdot Q_h v + f(Q_h v, w), \quad (r, \theta) \in S^c, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

где $f(Q_h v, w) = K\gamma (\cos w (\cos Q_h v - 1) - \sin w (\sin Q_h v - Q_h v))$, с условиями Неймана на границе $\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial S^c} = 0$, ν — единичная внутренняя нормаль к границе S^c , начальным условием $v(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta)$, условием периодичности $v(r, \theta + 2\pi, t) = v(r, \theta, t)$.

Рассмотрим одно из модельных уравнений, соответствующих (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v - v + \Lambda Q_h v + \Omega Q_h v^2 - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3, \\ 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Как в главе 2 для уравнения (3.3) справедливо интегральное представление решения с использованием функции Грина (2.2) при $r_1 = 0, r_2 = r_0$.

Бифуркационным параметром выбран коэффициент диффузии D .

Рассмотрим случай $Re\lambda_{n,m}^c \neq 0$ для модельной задачи (3.4). Линеаризованное уравнение, представим в виде (3.1). Далее будем считать, что $h = \pi/3$

(аналогично можно рассмотреть другие случаи). Согласно теореме 5.1.1 [106] и лемме 3.1, интерес представляет случай $\Lambda < -1$ (условие 2.1) Выберем K так, чтобы выполнялось условие 2.1. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. При $h = \pi/3$, $\Lambda < -1$, существует $\mu > 0$ такое, что при фиксированном значении $m = 1$ и для любых значений параметра D , удовлетворяющих неравенству $D_1 - \mu < D < D_1$, существует решение $\varphi^c(r, \theta, D)$ уравнения (3.4) из класса W_1 , определяемое равенством

$$\begin{aligned} \varphi^c(r, \theta, D) = & zR_{3,1}(r) \cos 3\theta + z^2 P_6(r, D) \cos 6\theta + \\ & + z^3 P_9(r, D) \cos 9\theta + \xi(z, r, \theta, D) |_{z=z(D)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$P_6(r, D) = \frac{\Omega \gamma_1}{2(2\lambda_{3,1}^c - \lambda_{6,1}^c) d_{6,1}^2} \cdot R_{6,1}(r),$$

$$P_9(r, D) = -\frac{1}{(3\lambda_{3,1}^c - \lambda_{9,1}^c) d_{9,1}^2} \left[\frac{\Omega^2 \gamma_1 \gamma_2}{(2\lambda_{3,1}^c - \lambda_{6,1}^c) d_{6,1}^2} + \frac{\gamma_4}{4} \right] \cdot R_{9,1}(r),$$

здесь $\xi(z, r, \theta, D) = O(|z|^4)$, $z(D) > 0$ – непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_{3,1}^c z + \frac{1}{d_{3,1}^2} \left[\frac{\Omega^2 \gamma_1^2}{2(2\lambda_{3,1}^c - \lambda_{6,1}^c) d_{6,1}^2} - \frac{3\gamma_4}{4} \right] z^3 + \dots,$$

где $R_{3s,1}$ определяется равенством (3.2), $d_{3s,1}^2 = \int_0^{r_0} r R_{3s,1}^2(r) dr$ $s = 1, 2, 3$,

$$\gamma_1 = \int_0^{r_0} r R_{3,1}^2(r) R_{6,1}(r) dr, \quad \gamma_2 = \int_0^{r_0} r R_{3,1}^4(r) dr,$$

$$\gamma_3 = \int_0^{r_0} r R_{3,1}(r) R_{6,1}(r) R_{9,1}(r) dr, \quad \gamma_4 = \int_0^{r_0} r R_{3,1}^3(r) R_{9,1}(r) dr.$$

Решение $\varphi(r, \theta, D)$ – орбитально устойчиво.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1 для кольца S^r .

Используя пакет символьных вычислений Wolfram Mathematica 11.3, разработаны и проведены численные эксперименты по построению приближенных решений задачи (3.4), определяемых равенством (3.5), для значений параметров $\Lambda = -3/2$, $D = 0, 1; 0, 01$. Заметим, что теорема 3.1 носит локаль-

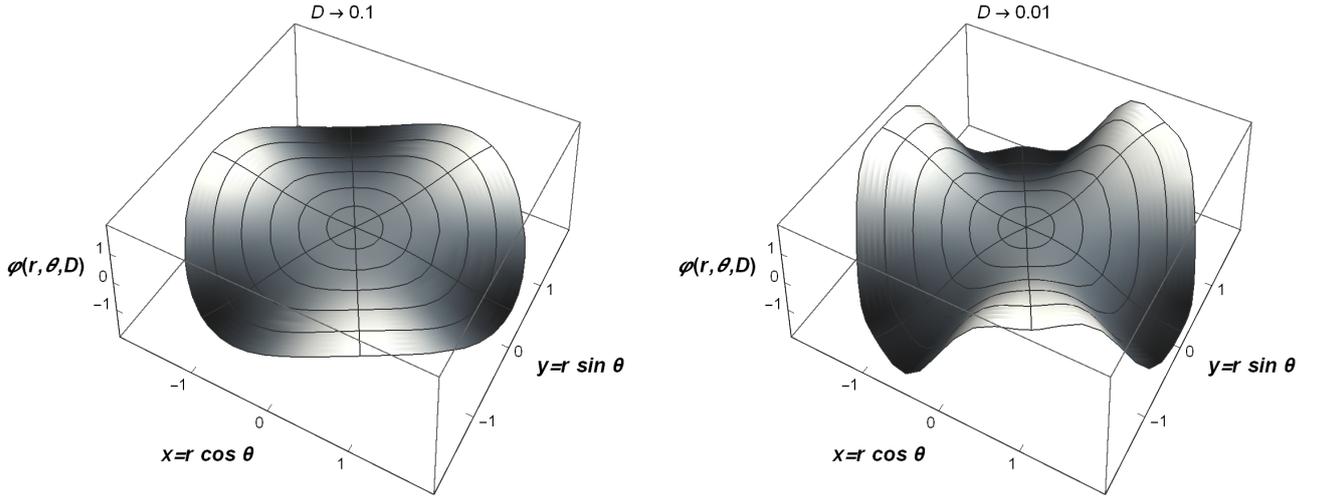


Рис. 3.1: Приближенные решение (3.5) для $\Lambda = -3/2$, $h = \pi/3$ при $D = 0, 1; 0, 01$

ный характер. Для исследования построенных из класса W_1 при уменьшении значения бифуркационного параметра и выходе его значения в область надкритичности воспользуемся методом Галеркина, согласованным с методом центральных многообразий.

3.1.2. Галеркинские аппроксимации неоднородных в пространстве структур

В соответствии с методом Галеркина, приближенные решения представим в виде

$$\varphi^*(r, \theta, D) = \sum_{n=1}^N (z_n \exp[in\theta] + \bar{z}_n \exp[-in\theta]) R_{n,1}(r), \quad (3.6)$$

здесь z_n, \bar{z}_n — комплексно сопряженные выражения, функции $R_{n,m}(r)$ определяются равенством (3.2).

Так как функция $\varphi^*(r, \theta, D)$ должна удовлетворять уравнению (3.4), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_n = \lambda_{n,1}^c z_n + \sigma_n(z, \bar{z}), \quad \dot{\bar{z}}_n = \overline{\lambda_{n,1}^c} \bar{z}_n + \bar{\sigma}_n(z, \bar{z}), \quad (3.7)$$

где $\lambda_{n,1}^c(D) = -1 - D\lambda_{n,1}^2 + \exp[inh]\Lambda$, $\overline{\lambda_{n,1}^c}(D) = -1 - D\lambda_{n,1}^2 + \exp[-inh]\Lambda$, $\sigma_n(z(D), \bar{z}(D)), \bar{\sigma}_n(z(D), \bar{z}(D))$ — формы третьей степени относительно z_n, \bar{z}_n , $n = 1, 2, \dots$

Системы (3.7) имеют нулевое решение, устойчивость которого определяется спектром $\lambda_{n,1}^c, \overline{\lambda_{n,1}^c}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) соответствующей матрицы устойчивости. Как и выше будем считать, что выполняется условие 2.1.

Считая $h = \pi/3$, критическое значение бифуркационного параметра, при котором нулевое стационарное решение системы (3.7) теряет устойчивость, $D^* = \frac{-\Lambda - 1}{\lambda_{3,1}^2}$. При уменьшении параметра D и прохождении через критическое значение реализуется бифуркация типа "вилка" и рождается пара устойчивых стационарных точек $\pm z^*(D) = \{0, 0, \pm z_3^*, 0, 0, \pm z_6^*, \dots\}$, являющихся решениями алгебраической системы уравнений

$$\lambda_{n,1}^c z_n + \varepsilon_n(z_l) = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

где $\varepsilon_n(z_l)$ — полином третьей степени, содержащий вторую и третью степень z_l . Исходя из этого, с учетом (3.6), стационарное решение задачи (3.4) из класса W_1 определяется асимптотическим равенством

$$\varphi^*(r, \theta, D) = \sum_{k=1}^{[N/3]} z_{3k}(D) \cos[3k\theta] R_{3k,1}(r). \quad (3.9)$$

Например, при $N = 3$ решение $\varphi^*(r, \theta, D)$ определяется системой (3.8) при условии $R_{3k,1} = J_{3k,1}$, $k = 1, 2, 3$.

Справедливо утверждение аналогичное теореме 2.2.

Теорема 3.2. При выполнении условий 1.1 и 2.1 для $h = \pi/3$ при фиксированном значении $m = 1$ и для любых значений параметра D , удовлетворяющих неравенству $D < D^*$, существует непрерывное по D стационарное решение $\varphi^*(r, \theta, D)$ уравнения (3.4) из класса W_1 , определяемое равенством (3.9), где $z_{3k}(D)$ при $N = 3$ является решением системы (3.8).

Численные эксперименты проводились для различных N , в частности, для $N = 7$ при фиксированных значениях параметров $\Lambda = -3/2$, $\Omega = 0.12926$, что соответствует $K = 2$, $\gamma = 0.76106$, $w = 1.74147$. Получены результаты, которые повторяют результаты применения метода центрального многообразия.

3.1.3. Периодические по времени решения начально-краевой задачи на круговой области с оператором инволюции

На круге S^c рассматривается задача (3.3) с однородными краевыми условиями Неймана на границе и условием периодичности по θ и t :

$$u(r, \theta, t + T) = u(r, \theta, t), T \gg 1.$$

Периодические по времени решения в задаче (3.3) представим в виде

$$u(r, \theta, t) = v(r, \xi), \text{ где } \xi = \alpha(\theta + \omega t).$$

Периодичность по θ означает, что $v(r, \xi + 2\alpha\pi) = v(r, \xi)$.

Периодичность по t означает, что $v(r, \xi + \omega T) = v(r, \xi)$. Следовательно, $u(r, \theta + 2\pi, t + T) = v(r, \xi + \alpha 2\pi + \alpha \omega T) = v(r, \xi)$. Далее для 2π -периодичности по θ , положим $\alpha = 1$, тогда $v(r, \xi + \omega t) = v(r, \xi)$.

Как и выше уравнение (3.3) представим в виде

$$\frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t} + u - D\Delta u + K\gamma \sin w \cdot Q_h u = f(Q_h u, w) \quad (3.10)$$

или $Lu = f(Q_h u, w)$, где $Lu = \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t} + u - D\Delta u + K\gamma \sin w \cdot Q_h u$, $(r, \theta) \in S^c$.

Замена переменных $\xi = \theta + \omega t$, $u(r, \theta, t) = v(r, \xi)$ приводит к уравнению

$$\Delta v + D^{-1}(\omega v_\xi - v + \Lambda Q_h v) = D^{-1}f(Q_h v, w). \quad (3.11)$$

Лемма 3.2. Решение спектральной задачи

$$\begin{aligned} \Delta v + D^{-1}(\omega v_\xi - v + \Lambda Q_h v) &= -\lambda v, \\ v(r, \xi + \omega T) &= v(r, \xi), \frac{\partial v(r_0, \xi)}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

в классе периодических функций позволяет представить решение задачи (3.11) в виде нелинейного интегрального уравнения

$$v(r, \xi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} k(r, \rho, \xi, \eta) f(Q_h v(\rho, \eta), w) \rho d\rho d\eta,$$

где ядро имеет вид

$$k(r, \rho, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi d_{n,m}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} R\left(\lambda_{n,m} \frac{r}{r_0}\right) R\left(\lambda_{n,m} \frac{\rho}{r_0}\right) \times \\ \times \exp[in(\xi + \eta)] (in\omega + 1 + \mu\lambda_{n,m}^2 + \Lambda \exp[in\eta])^{-1}.$$

Воспользуемся заменой $v(r, \xi) = R(r) \exp[in\xi]$, тогда

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = inR(r) \exp[in\xi], \quad \Delta v = \left(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{n^2}{r^2}R(r) \right) \exp[in\xi], \quad (3.13)$$

$$Q_h v = R(r) \exp[in(\xi + h)] = R(r) \exp[inh] \cdot \exp[in\xi].$$

Подставляя (3.13) в (3.12), получим

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(-\frac{n^2}{r^2} + \mu^{-1}(-in\tau_1\omega - 1 + \Lambda \exp[inh]) + \lambda \right) R(r) = 0.$$

Выберем функции $R(r)$, удовлетворяющие уравнению Бесселя

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \left(\tilde{\lambda}^2 r^2 - n^2 \right) R(r) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.14)$$

с краевым условием $R'(r_0) = 0$ и условием ограниченности $|R(0)| < \infty$. Общее решение уравнения Бесселя (3.14), учитывая условие ограниченности, с точностью до постоянной имеет вид $R(r) = J_n(\tilde{\lambda}r)$, где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $n \geq 0$.

Уравнение

$$J'_n(\tilde{\lambda}r_0) = 0 \quad (3.15)$$

имеет счетное число положительных корней $\lambda_{n,m}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_{n,m}}{r_0}$, следовательно, решение уравнения (3.14) можно записать в виде:

$$R(r) = R(\lambda_{n,m}r) d_{n,m}^{-1} = R_{n,m}(r) d_{n,m}^{-1}, \quad d_{n,m}^2 = \frac{\lambda_{n,m}^2 r_0^2 - n^2}{2\lambda_{n,m}^2} R_{n,m}^2(r_0), \quad (3.16)$$

где $\lambda_{n,m}$ — m -й корень уравнения (3.15) при каждом фиксированном $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$

Решение спектральной задачи (3.12) будет иметь вид

$$\psi_{n,m}(r, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{R_{n,m}(r)}{d_{n,m}} \exp[in\xi] = C_{n,m} J_n\left(\frac{\lambda_{n,m}}{r_0} r\right) \exp[in\xi],$$

$$\lambda_{n,m}^c = in\omega + 1 + \mu \frac{\lambda_{nm}^2}{r_0^2} + \Lambda \exp[inh], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, m = 1, 2, \dots$$

где $C_{n,m} = \frac{1}{d_{n,m}\sqrt{2\pi}}$ — нормирующий множитель. Следовательно,

$$u_{n,m}(r, \theta, t) = v_{n,m}(r, \theta + \omega t) = C_{n,m} J_n(\lambda_{n,m} r) \exp[in(\theta + \omega t)].$$

Подстановка разложения функции $v(r, \xi)$ по собственным функциям

$$v(r, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{v}_{n,m} J_n\left(\frac{\lambda_{n,m}}{r_0} r\right) \exp[in\xi],$$

$J_{n,m}(r), \tilde{v}_{n,m}$ — коэффициенты разложения по $\psi_{n,m}$, $v_{n,m} = (v, \psi_{n,m})$, в уравнение (3.10) приводит к искомому нелинейному уравнению.

Бифуркация вращающихся структур в уравнении на круге с операторами поворота и сжатия рассмотрена в [7]. Рассмотрим задачу нахождения решения типа "бегущая волна" в задаче (3.4). Выберем K так, чтобы выполнялось условие 2.1.

Обозначим $D_{n,m} = (-1 + \Lambda \exp[inh]) / \lambda_{n,m}^2$, $n = 1, 3, \dots, m = 1, 2, \dots$. Если $D > D_{1,1}$, то согласно лемме 3.2 нулевое решение задачи (3.3) является устойчивым. При убывании параметра D и его прохождении через значение $D_{1,1}$ два собственных значения $\lambda_{1,1}^c, \overline{\lambda_{1,1}^c}$ проходят через мнимую ось. Будем считать, что $h = 2\pi/3$, аналогично можно рассмотреть другие случаи.

Теорема 3. 3. При $\Lambda < -1$, существует $\mu > 0$ такое, что при фиксированном значении $m = 1$ и для любых значений параметра D , удовлетворяющих неравенству $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$, существует решение $\varphi^c(r, \theta, t, D)$ уравнения (3.3) вида

$$\begin{aligned} & \varphi^c(r, \theta, t, D) = \\ & = \rho(D) R_{1,1}(r) \left(z(t) \exp[i(\omega(D)t + \theta)] + \bar{z}(t) \exp[-i(\omega(D)t + \theta)] \right) + \\ & \quad + P_3(r) \rho^3(D) \left(\alpha_3(D) z^3(t) \exp[3i(\omega(D)t + \theta)] + \right. \\ & \quad \left. + \beta_3(D) \bar{z}^3(t) \exp[-3i(\omega(D)t + \theta)] \right) + \\ & \quad + P_5(r) \rho^5(D) \left(\alpha_5(D) z^5(t) \exp[5i(\omega(D)t + \theta)] + \right. \\ & \quad \left. + \beta_5(D) \bar{z}^5(t) \exp[-5i(\omega(D)t + \theta)] \right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
P_3(r) &= \frac{\gamma_2}{d_{3,1}^2} \cdot R_{3,1}(r), & P_5(r) &= \frac{\gamma_3}{d_{5,1}^2} \cdot R_{5,1}(r), \\
\alpha_3(D) &= \frac{\exp[3ih]}{3\lambda_{1,1}^c - \lambda_{3,1}^c}, & \beta_3(D) &= \frac{\exp[-3ih]}{3\lambda_{1,1}^c - \lambda_{3,1}^c} \\
\alpha_5(D) &= \frac{3 \exp[8ih]}{(3\lambda_{1,1}^c - \lambda_{3,1}^c)(5\lambda_{1,1}^c - \lambda_{5,1}^c)}, & \beta_5(D) &= \frac{3 \exp[-8ih]}{(3\lambda_{1,1}^c - \lambda_{3,1}^c)(5\lambda_{1,1}^c - \lambda_{5,1}^c)}, \\
\omega(D) &= \operatorname{Im} \left(\lambda_{1,1}^c(D) + \frac{3}{d_{1,1}^2} \left[\gamma_1 \exp[ih] \rho^2(D) + \frac{\gamma_2^2}{d_{3,1}^2} \frac{\exp[4ih]}{(3\lambda_{1,1}^c - \lambda_{3,1}^c)} \rho^4(D) \right] \right),
\end{aligned}$$

здесь $\rho(D) > 0$ — корень уравнения

$$\operatorname{Re} \left(\lambda_1^c(D) + \frac{3}{d_{1,1}^2} \left[\gamma_1 \exp[ih] \rho^2(D) + \frac{\gamma_2^2}{d_{3,1}^2} \frac{\exp[4ih]}{(3\lambda_1^c - \lambda_3^c)} \rho^4(D) \right] \right) = 0,$$

где $R_{n,1}$ и $d_{n,1}^2$, $n = 1, 3, 5$ определяются равенствами (3.16),

$$\gamma_1 = \int_0^{r_0} r R_1(r)^4 dr, \quad \gamma_2 = \int_0^{r_0} r R_1^3(r) R_3(r) dr, \quad \gamma_3 = \int_0^{r_0} r R_1^2(r) R_3(r) R_5(r) dr.$$

Решение $\varphi^c(r, \theta, t, D)$ — экспоненциально устойчиво.

Доказательство теоремы проведено методом центральных многообразий.

При фиксированных значениях параметров проводились численные эксперименты с применением пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 11.3. Построены приближенные решения $\varphi^c(r, \theta, t, D)$, определяемые равенством (3.17) (см. рисунок 3.2).

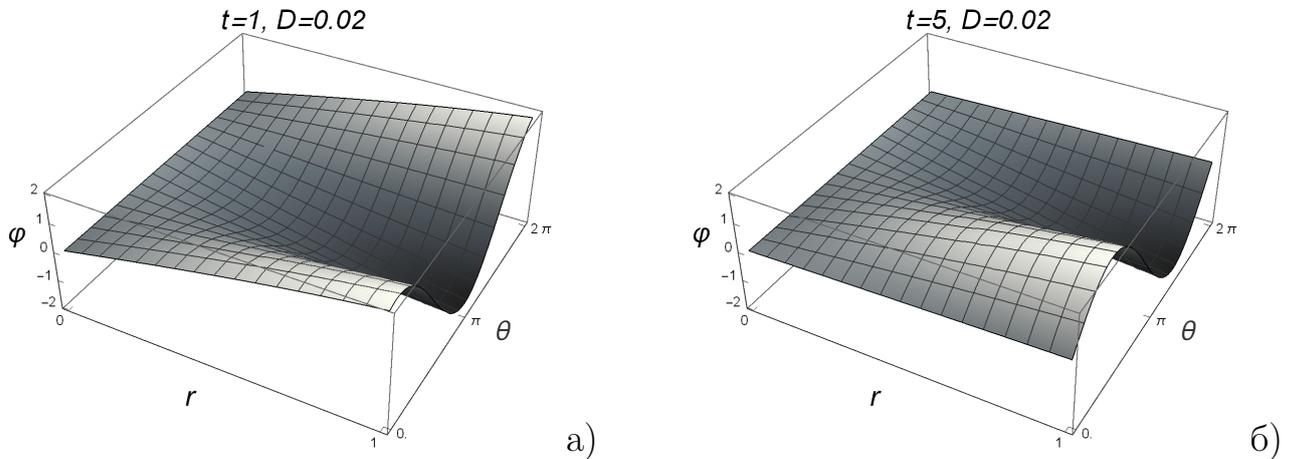


Рис. 3.2: Приближенное решение (3.17) для $\Lambda = -3/2$, $h = 2\pi/3$, $D = 0,02$ при а) $t = 1$; б) $t = 5$

3.2. Сценарии поведения решений нелинейных уравнений с оператором поворота на окружности

В данной главе рассматривается ФДУ (2.1) на окружности S^1 (узком кольце, $r_2 - r_1 = \delta \ll 1$) с оператором инволюции $Q = Q_h : h = 2\pi/p, p \in \mathbb{N}, Q^p = I$ [1, 89]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Q_h u), \theta \in S^1, t \geq 0, \quad (3.18)$$

с начальным условием

$$u(\theta, 0) = u_0(\theta) \quad (3.19)$$

и условием периодичности

$$u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t), \quad (3.20)$$

здесь $D > 0, K > 0, 0 < \gamma < 1, Q_h u(\theta, t) = u(\theta + h, t)$ — оператор поворота на угол h .

Отметим, что исследованию метаустойчивых (медленно меняющихся) структур параболической задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u), x \in (0, 1), \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t), \end{aligned}$$

где $D \ll 1$, функция $f(u)$ является гладкой и удовлетворяет условиям $f(\pm 1) = 0, f'(\pm 1) > 0, f(-x) = -f(x)$, посвящены работы [116, 121].

Было доказано, что при достаточно малых значениях параметра D для произвольного фиксированного $n \in \mathbb{N}$ существует n -параметрическое семейство решений, являющихся медленно меняющимися функциями с внутренними переходными слоями [29] с n точками перехода h_1, h_2, \dots, h_n . Переменные h_1, h_2, \dots, h_n являются решениями системы n обыкновенных дифференциальных уравнений.

Будем предполагать, что выполняется условие 1.1. Фиксируем гладкую ветвь решений $u = w(K)$ из класса W_0 уравнения (3.18). Как и ранее, выполняем замену $u = v + w$, где $v = v(\theta, t)$ — новая неизвестная функция, и

рассматриваем одну из модельных задач для задачи (3.18)–(3.20):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \Lambda \left(Q_h v + \frac{1}{2} (Q_h v)^2 \operatorname{ctg} w - \frac{1}{6} (Q_h v)^3 + O(v^4) \right), \quad (3.21)$$

$$v(\theta + 2\pi, t) = v(\theta, t), v(\theta, 0) = v_0(\theta), t > 0.$$

На окружности S^1 устанавливается существование, описывается асимптотическая форма и определяется характер устойчивости стационарных структур из класса W_1 , бифурцирующих от решения $u(\theta, t) = w$ из класса W_0 модельной задачи (3.21), которое задается уравнением (1.6). Также описываются условия, при выполнении которых возможен сценарий возникновения медленно меняющихся решений задачи (3.18)–(3.20) с внутренними переходными слоями с шестью точками перехода для 2.

Для решения поставленных задач, используя галеркинские аппроксимации (3.21) средних размерностей, проводится построение иерархии упрощенных моделей уравнения (3.21). Как известно [2], анализ иерархии упрощенных моделей многих нелинейных диссипативных систем позволяет предсказать качественные и количественные характеристики решений.

3.2.1. Бифуркация неоднородного в пространстве стационарного решения для окружности, асимптотическое представление

Уравнение (3.21), линеаризованное в окрестности нулевого решения, представим в операторной форме

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L(D, K)v, \quad (3.22)$$

где $L(D, K)v = -v + D\Delta v + \Lambda Q_h v$, $Q_h v = v(x + h)$, Λ определяется равенством (1.9).

Частным случаем леммы 2.1 является следующее утверждение для оператора $L(D, K)$, действующего в пространстве $H(S^1)$ с областью определения $H^2(S^1)$.

Лемма 3.3. Оператор $L(D, K)$ имеет полную в $H(S^1)$ ортогональную систему собственных функций $\psi_n(\theta) = \exp[in\theta]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где

$$L(D, K)\psi_n(\theta) = (-1 - Dn^2 + \Lambda \exp[inh]) \psi_n(\theta),$$

Собственные значения оператора $L(D, K)$:

$$\lambda_n = -1 - Dn^2 + \Lambda \exp[inh], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.23)$$

Согласно теореме 5.1.1([106, стр.113]) и лемме 3.3, если $\Lambda > 1$, то нулевое решение (3.21) неустойчиво для любых $D > 0$. Если $-1 < \Lambda < 1$, то нулевое решение (3.21) является асимптотически устойчивым для любых $D > 0$. Выберем K так, чтобы как и ранее выполнялось условие 2.1:

Обозначим $D_n = (-1 - \Lambda)/n^2, n = 1, 2, \dots$. Если $D > D_1$, то согласно лемме 3.3 нулевое решение задачи (3.21) является устойчивым. При уменьшении значения параметра D и переходе через критическое значение D_1 одно собственное значение λ_1 проходит через нуль. Если $D_2 < D < D_1$, то индекс неустойчивости нулевого решения равен 1.

Предположим, что выполняется

Условие 3.4. $\cos w = 0$.

Таким образом, рассматривается задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v &= D \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \Lambda Q_h v - \frac{\Lambda}{6} (Q_h v)^3 + O(v^4), \\ v(\theta + 2\pi, t) &= v(\theta, t), \quad v(\theta, 0) = v_0(\theta), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Имеет место теорема.

Теорема 3.4. При $\Lambda < -1$, $h = \pi$ существует $\mu > 0$ такое, что для любых значений параметра D , удовлетворяющих неравенству $D_1 - \mu < D < D_1$, существует $z(D) > 0$, $z(D_1) = 0$ — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1 z + \frac{\Lambda}{8} z^3 + \frac{\Lambda^2}{192(3\lambda_1 - \lambda_3)} z^5 + \frac{\Lambda^3(\lambda_1 + \lambda_3)}{4608(3\lambda_1 - \lambda_3)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} z^7 + \dots, \quad (3.25)$$

которой соответствует пара стационарных решений $\pm \varphi_1(\theta, D)$ задачи (3.24)

из класса W_1 :

$$\varphi_1(\theta, D) = \left(z \cos \theta + \sum_{k=1}^3 z^{2k-1} \sigma_{3k-1}(\theta, D) + \xi(z, \theta, D) \right) \Big|_{z=z(D)}, \quad (3.26)$$

$$\sigma_3 = -\frac{\Lambda}{24(3\lambda_1 - \lambda_3)} \cos 3\theta, \quad (3.27)$$

$$\sigma_5 = \frac{\Lambda^2}{192(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left[\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} \cos 5\theta - \frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_3} \cos 3\theta \right], \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_7 = & \frac{\Lambda^3}{4608(3\lambda_1 - \lambda_3)} \left[\frac{1}{(7\lambda_1 - \lambda_7)} \left(\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_5} \right) \cos 7\theta + \right. \\ & + \frac{1}{(7\lambda_1 - \lambda_5)} \left(\frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{9}{5\lambda_1 - \lambda_5} \right) \cos 5\theta + \\ & \left. + \frac{3}{(7\lambda_1 - \lambda_3)} \left(\frac{1}{5\lambda_1 - \lambda_5} + \frac{3}{5\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{1}{3\lambda_1 - \lambda_3} \right) \cos 3\theta \right], \end{aligned}$$

здесь $\xi(z, x, D) = O(|z|^9)$, Решение $\varphi_1(x, D)$ — орбитально устойчиво в пространстве $H^1(S^1)$.

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы воспользуемся методом центральных многообразий [106, гл. 6]. Существование центрального многообразия уравнения (3.24) в окрестности $(0, D_1) \in \mathbb{R} \times H^1$ доказывается, как в [7, 14]. Как в [16] представим центральное многообразие в виде

$$u = z(t) \cos(\theta) + \sum_{k=1}^N z^{2k+1}(t) \sigma_{2k+1}(\theta, D). \quad (3.29)$$

где $\sigma_{2k+1}(\theta, D)$, $k = \overline{1, N}$ — функции из пространства $H^2(S^1)$. Уравнение (3.24) с учётом представления многообразия (3.29) принимает вид:

$$\dot{z} = \lambda_1 z + \sum_{k=1}^N C_{2k+1} z^{2k+1}, \quad z \geq 0, \quad (3.30)$$

Для определения коэффициентов разложений (3.29) и (3.30) воспользуемся

равенством

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_1 z + \sum_{k=1}^N C_{2k+1} z^{2k+1} \right) \left(\cos \theta + \sum_{k=1}^N (2k+1) z^{2k} \sigma_{2k+1}(\theta, D) \right) + \\
& \quad + z \cos \theta + \sum_{k=1}^N z^{2k+1} \sigma_{2k+1}(\theta, D) = \\
& = D \left(-z \cos \theta + \sum_{k=1}^N z^{2k+1} \frac{\partial^2 \sigma_{2k+1}(\theta, D)}{\partial \theta^2} \right) + \\
& + \Lambda \left(-z \cos \theta + \sum_{k=1}^N z^{2k+1} \sigma_{2k+1}(\theta + \pi, D) \right) - \\
& \quad - \frac{\Lambda}{6} \left(-z \cos \theta + \sum_{k=1}^N z^{2k+1} \sigma_{2k+1}(\theta + \pi, D) \right)^3.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

В (3.31) для коэффициентов при z в левой и правой частях выполняется равенство. Из равенства коэффициентов в (3.31) при z^3 получаем уравнение:

$$C_3 \cos \theta + \sigma_3(\theta, D) (3\lambda_1 + 1) = D \frac{\partial^2 \sigma_3(\theta, D)}{\partial \theta^2} + \Lambda \sigma_3(\theta + \pi, D) + \frac{\Lambda}{6} \cos^3 \theta. \tag{3.32}$$

Из условия разрешимости уравнения (3.32) в пространстве $H^2(S^1)$ в классе гладких по параметру D функций следует, что $C_3 = \frac{\Lambda}{8}$. Тогда решением уравнения (3.32) в указанном классе является функция $\sigma_3(\theta, D)$ определяемая равенством (3.27).

Легко видеть, что σ_5 удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
& C_5 \cos \theta + 3C_3 \sigma_3(\theta, D) + \sigma_5(\theta, D) (5\lambda_1 + 1) = \\
& = D \frac{\partial^2 \sigma_5(\theta, D)}{\partial \theta^2} + \Lambda \sigma_5(\theta + \pi, D) - \frac{\Lambda}{2} \sigma_3(\theta + \pi, D) \cos^2 \theta,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

учитывая (3.27) и условие разрешимости уравнения (3.33), находим

$$C_5 = \frac{\Lambda^2}{192(3\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Тогда решением уравнения (3.33) является функция σ_5 , удовлетворяющая равенству (3.28).

Аналогично находим C_7 и σ_7 .

Процесс последовательного построения коэффициентов разложений (3.29) и (3.30) неограниченно продолжим. Получающийся в результате ряд (3.29) является асимптотически сходящимся в окрестности $z = 0$, $D = D_1$ [106].

Проведем анализ семейства уравнений (3.30). Тривиальное решение (3.30) асимптотически устойчиво, если значение бифуркационного параметра D больше первого критического значения D_1 . При уменьшении значения параметра D и переходе через значение D_1 нулевое решение меняет характер устойчивости: наибольшее собственное значение переходит через мнимую ось и становится положительным. В результате этого от теряющего устойчивость нулевого решения (3.30) ответвляется непрерывная по параметру D ветвь асимптотически устойчивых стационарных точек $\varphi_1(\theta, D)$. Отсюда, в силу принципа сведения [106], следует справедливость теоремы. □

Отметим, что утверждения теоремы 3.4 носят локальный по параметру D характер. Очевидно, что на основании выполненного выше анализа никаких заключений об устойчивости $\varphi_1(\theta, D)$ при углублении D в область надкритичности сделать нельзя. Однако, приближенное равенство

$$\varphi_1(\theta, D) \approx (z \cos \theta + z^3 \sigma_3(\theta, D) + z^5 \sigma_5(\theta, D) + z^7 \sigma_7(\theta, D)) |_{z=z(D)}, \quad (3.34)$$

где $z(D) > 0$, $z(D_1)$, — непрерывная ветвь стационарных точек уравнения

$$\dot{z} = \lambda_1 z - \frac{3}{4} z^3 + \frac{3}{16(3\lambda_1 - \lambda_3)} z^5 - \frac{3(\lambda_1 + \lambda_3)}{64(3\lambda_1 - \lambda_3)^2(5\lambda_1 - \lambda_3)} z^7$$

открывает путь для исследования на устойчивость $\varphi_1(\theta, D)$.

Рассмотрим поведение $\varphi_1(\theta, D)$ при уменьшении параметра D . С этой целью воспользуемся приближенным равенством (3.34). Численные расчеты проводились для случая $\Lambda = -3/2$. Вблизи значения параметра D_1 график функции φ_1 имеет квазигармоническую форму с малой амплитудой. При уменьшении параметра D амплитуда функции $\varphi_1(\theta, D)$ возрастает. При этом $|\varphi_1(\theta, D)|$ функции принимает максимальное значение в точках 0 , π и 2π . Когда функция $|\varphi_1(\theta, D)|$ достигает значения $(-1 - \Lambda)$, рост ее амплитуды прекращается. При дальнейшем уменьшении параметра D увеличиваются промежутки, примыкающие к $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$, на которых

функция $\varphi_1(\theta, D)$ принимает почти постоянные значения. При достижении D некоторого значения, функция $\varphi_1(\theta, D)$ начинает колебаться (явление Гиббса). При D близких к нулю $\varphi_1(\theta, D)$ является функцией типа внутреннего переходного слоя [29] с двумя точками перехода $\pi/2$ и $3\pi/2$. В качестве иллюстрации на рис. 3.4 приведены графики функции $\varphi_1(\theta, D)$ для $D = 0.49$, $D = 0.4$, $D = 0.2$, $D = 0.1$, $D = 0.01$.

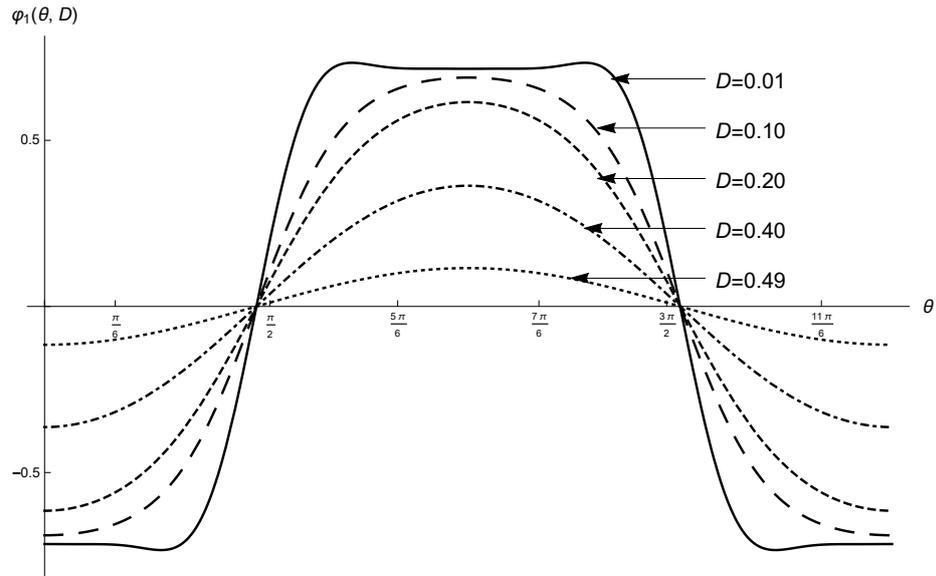


Рис. 3.3: Функция $\varphi_1(\theta, D)$ при $\Lambda = -3/2$, $D = 0.49; 0.4; 0.2; 0.1; 0.01$.

При уменьшении параметра D и прохождении значений $D_n = \frac{-1 + (-1)^n \Lambda}{(2n - 1)^2}$, $n = 1, 2, \dots$ каждый раз от $v = 0$ ответвляется пара $\pm \varphi_n(\theta, D)$ стационарных решений задачи (3.24) из класса W_1 . Их бифуркационный анализ можно также провести методом центральных многообразий или воспользоваться принципом подобия $\varphi_k(\theta, D) = \varphi_1(k\theta; kD)$, $k = 2, 3, \dots$ [2]. Нетрудно установить, что $\varphi_k(\theta, D)$ рождаются неустойчивыми с индексом неустойчивости $k - 1$.

3.2.2. Галеркинские аппроксимации неоднородных в пространстве структур на окружности

Для исследования динамики стационарных структур $\varphi_k(\theta, \mu)$, $k = 1, 2, \dots$ при уменьшении значения бифуркационного параметра D строится иерархия

упрощенных моделей уравнения (3.24). Для этого приближенные решения задачи (3.24) представляются в виде

$$v = z_0 + \sum_{k=1}^N (z_k(t, D) \cos k\theta + y_k(t, D) \sin k\theta), \quad (3.35)$$

что позволяет перейти к системам обыкновенных дифференциальных уравнений [45]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= F_1(z_k(t, D), y_s(t, D)), \\ \dot{y}_s &= F_2(z_k(t, D), y_s(t, D)), \quad k, s, = \overline{0, N} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Анализ систем (3.36) проводился для $N = \overline{20, 33}$. Согласно проведенному анализу они обладают рядом общих свойств. Опишем их.

Для $\Lambda < -1$ и любого $N = \overline{20, 33}$ нулевое решение (3.36) экспоненциально устойчиво при $D > D_1$. При переходе параметра D значения D_1 нулевое решение теряет устойчивость: максимальная точка спектра нулевого решения переходит с ненулевой скоростью с отрицательной на положительную полуось. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две непрерывные по D ветви неподвижных точек $\pm z^1(D, N) = \pm (z_0^1; z_1^1; \dots; z_N^1)$, такие что

$$z_{2s}^1 = 0, \quad (-1)^s z_{2s+1}^1 > 0, \quad s = 0, 1, \dots; \quad z_1^1 > |z_3^1| > z_5^1 > \dots$$

В силу (3.35) и определения z^1 имеет место следующее приближенное равенство

$$\varphi_1^*(\theta, D) \approx \sum_{s=1}^n z_{2s-1}^1 \cos(2s-1)\theta, \quad n = \left[\frac{N+1}{2} \right]. \quad (3.37)$$

Для значений $N = \overline{20, 33}$ проведенный анализ спектра ветви неподвижных точек $z^1(D, N)$ показал, что существует $\Lambda = \Lambda(N) \approx -2$ такое, что при любых значениях параметра D , удовлетворяющих неравенству $D > D_1$ спектр лежит на отрицательной полуоси. При уменьшении параметра D собственные значения сближаются: максимальное собственное значение убывает, а минимальное собственное значение — возрастает. Ветви неподвижных точек $z^1(D, N)$ устойчивы для указанных значений Λ при любых $D < D_1$.

Для $\Lambda < \Lambda^*$ существует значение параметра $D^* = D^*(N)$, такое что при $D^* < D < D_1$ все точки спектра $z^1(D, N)$ принадлежат отрицатель-

ной полуоси. При $D = D^*$ наибольшая точка спектра $z^1(D, N)$ переходит на положительную полуось. В результате от теряющей устойчивость ветви $z^1(D, N)$ ответвляется пара непрерывных по параметру D ветвей стационарных точек $z_{\pm}^1(D, N) = \{(z_D^1)_k, k = \overline{0, N}\} = \{\pm z_0, z_1, \pm z_2, z_3, \dots\}$, $z_k = z_k(D)$, спектры которых совпадают. При уменьшении параметра D все точки спектров $z_{\pm}^1(D, N)$ находятся в левой полуплоскости для $D < D^*$.

Есть основания полагать, что решения $\varphi_1(\theta, D)$ для $\Lambda < \Lambda^*$ теряет устойчивость при переходе параметра D через значение D_1^* . В результате бифуркации "вилка" от $\varphi_1(\theta, D)$ ответвляются две ветви $\varphi_1^{\pm}(\theta, D)$ асимптотически устойчивых стационарных решений (3.36). Справедливо приближенное равенство

$$\varphi_1^{\pm}(\theta, D) \approx \sum_{k=0}^N (z_{\pm}^1)_k \cos k\theta. \quad (3.38)$$

На рис. 3.4 приведены графические представления решений системы (3.36) вида (3.38) для $\Lambda = -3$, $D = 0.58394; 0.5; 0.1; 0.010, 01$.

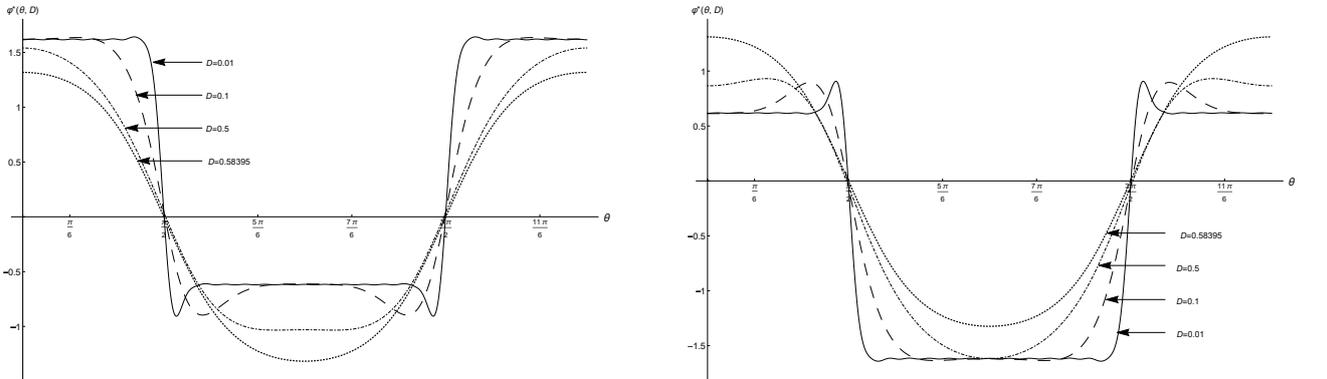


Рис. 3.4: Приближенные решение системы (3.36) вида (3.38) для $\Lambda = -3$, $h = \pi/3$ при $D = 0.58394; 0.5; 0.1; 0.01$.

Далее считаем, что $-2 < \Lambda < -1$. При уменьшении параметра D и переходе значения $D = (-1 - \Lambda)/3$ индекс неустойчивости нулевого решения системы (3.36) увеличивается на единицу. В результате от нулевого решения ответвляется вторая пара непрерывных по параметру D ветвей стационарных точек $\pm z^2(D, N) = \pm (z_0^2, z_1^2, \dots, z_N^2)$ таких, что

$$z_k^2 = 0, \quad k \neq 3, 9, \dots; \quad (-1)^s z_{6s+3}^2 > 0, \quad s = 0, 1, \dots; \quad z_3^2 > |z_9^2| > z_{15}^2 > \dots$$

В силу (3.36) справедливо приближенное равенство

$$\varphi_2(x, D) \approx \sum_{s=1}^n z_{6s-3}^2 \cos(6s-3)\theta, \quad n = \left[\frac{N-1}{9} \right] + 1. \quad (3.39)$$

Вблизи значения параметра D_2 график функции $\varphi_2(x, D)$ имеет квази-гармоническую форму с малой амплитудой. При уменьшении параметра D амплитуда функции $\varphi_2(x, D)$ возрастает. При этом $|\varphi_2(\theta, D)|$ принимает максимальное значение в точках $\theta = k\pi/3$, $k = 0, 6$. Когда функция $|\varphi_2(\theta, D)|$ достигает значения $(-1 - \Lambda)$, рост ее амплитуды прекращается. При дальнейшем уменьшении параметра D увеличиваются промежутки, примыкающие к $\theta = k\pi/3$, $k = 0, 6$, на которых функция $\varphi_2(\theta, D)$ мало меняется. При достижении D некоторого значения, зависящего от N , функция $\varphi_2(\theta, D)$ начинает колебаться, т. е. проявляется явление Гиббса. При D близких к нулю $\varphi_2(\theta, D)$ имеет вид функции типа внутреннего переходного слоя с шестью точками перехода $k\pi/6$, $k = 1, 3, \dots, 11$ [29].

В качестве иллюстрации на рис. 3.5 построены графики приближенных решений системы (3.36) вида (3.39) при $N = 33$, $\Lambda = -3/2$, $D = 0.05; 0.04; 0.02; 0,005$.

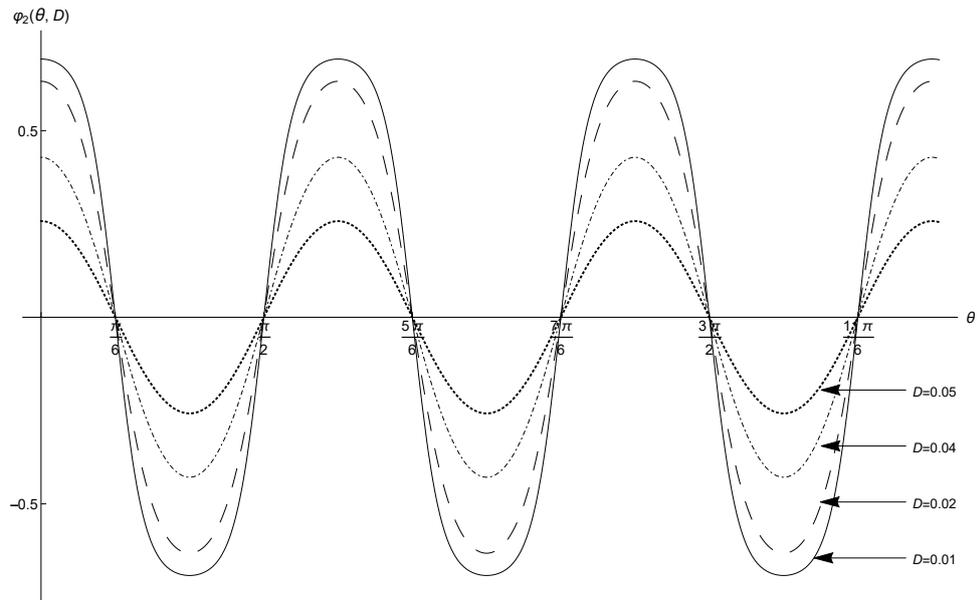


Рис. 3.5: Приближенные решения (ф3.39704.36ф) при $N = 33$, $\Lambda = -3/2$, $D = 0.05; 0.04; 0.02; 0,005$

Проведенный для $N = \overline{20, 33}$ анализ спектра ветви неподвижных точек

системы (3.36) $z^2(D, N)$ дал следующие результаты.

1. Спектр $z^2(D, N)$ лежит на вещественной оси.

2. Все точки спектра $z^2(D, N)$, кроме максимальной точки $\lambda_0(D, N)$, принадлежат отрицательной полуоси. При уменьшении параметра D отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка уменьшается, а минимальная точка увеличивается.

3. В окрестности бифуркационного значения параметра $D = \frac{-1 - \Lambda}{9}$ максимальная точка спектра $\lambda_0(D, N)$ ветви неподвижных точек $z^2(D, N)$ положительна. При отходе D от бифуркационного значения $\lambda_0(D, N)$ убывает. Вблизи нуля скорость изменения $\lambda_0(D, N)$ мала. Существует интервал $(D_1(N), D_2(N))$ изменения параметра D , на котором $\lambda_0(D, N)$ медленно меняется вблизи нуля.

4. Поведение $\lambda_0(D, N)$ при убывании параметра D от значения $D_1(N)$ зависит от размерности системы (3.36).

Для $N \neq 6k + 1, 6k + 2$, $k = \overline{1, 5}$ точка $\lambda_0(D, N)$, переходит через нуль на отрицательную полуось. Причем, для $N = 6k - 1, 6k$, $k = \overline{1, 5}$ точка $\lambda_0(D, N)$ при $D \rightarrow 0$ близка к нулю.

Для $N = 6k + 3, 6k + 4$, $k = \overline{1, 5}$ точка $\lambda_0(D, N)$ принимает отрицательные значения, и монотонно убывая, отходит от нуля.

Согласно проведенному выше анализу при $\Lambda < -1$ ветвь неподвижных точек $\varphi_1(\theta, D)$ устойчива для каждого $D < D_1$. Ветвь неподвижных точек $\varphi_2(\theta, D)$, рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 1 и сохраняет, как и в [116, 121], неустойчивость. Есть основания полагать, что максимальная точка спектра $\varphi_2(\theta, D)$ стремится к нулю при $D \rightarrow D^*$. Окружность неподвижных точек $\varphi_k(\theta, D)$, $k = 3, 4, \dots$, рождающаяся из нуля при $D = D_k = D_1 / (2k - 1)^2$, сохраняет при отходе параметра D от критического значения индекс неустойчивости. При этом $(k - 1)$ положительная точка спектра окружности неподвижных точек $\varphi_k(\theta, D)$ при $D \rightarrow D^*$ стремится к нулю.

3.2.3. Метаустойчивые структуры задачи на окружности

Рассмотрим вопрос о построении решений задачи (3.24), которые в течении длительного промежутка времени меняются медленно, а затем за сравнительно небольшой промежуток времени переходят в окрестность одного из устойчивых решений (3.24), так называемых медленно меняющихся решений.

Опишем один из вариантов эволюции метаустойчивых структур типа внутреннего переходного слоя с шестью точками перехода [29].

В системах (3.36) при определённых значениях бифуркационного параметра были обнаружены седло-узловые бифуркации, результатом которых является рождение двух непрерывных по параметру D ветвей неподвижных точек (3.36), индексы неустойчивости которых отличаются на единицу. Им соответствуют два приближенных решения начально-краевой задачи (3.24) типа внутреннего переходного слоя с шестью точками перехода. Уменьшение значения параметра D приводит к изменениям каждой пары непрерывных ветвей неподвижных точек (3.36). А это означает, что меняются и соответствующие им ветви приближенных решений (3.24). Найдены приближенные значения бифуркационного параметра D , при которых происходят седло-узловые бифуркации.

Показана реализация в системе (3.36) следующего сценария седло-узловой бифуркации: одна из точек покоя устойчива (все собственные значения расположены на отрицательной полуоси); вторая точка покоя неустойчива с индексом неустойчивости 1.

При уменьшении значения параметра D характер устойчивости неподвижных точек в системе (3.36), возникающих в результате седло-узловых бифуркаций, остается неизменным. Причем, максимальные собственные значения, которые в окрестности критического значения параметра D были близки к нулю, отходят от нуля.

Вычислительные эксперименты по исследованию бифуркации седло-узел проводились для значений $N = \overline{20, 33}$.

Упорядочим по убыванию бифуркационного значения параметра D седло-

узловые бифуркации каскада: седло-узловую бифуркацию с наибольшим критическим значением бифуркационного параметра будем считать первой. Для нее седло-узловая точка покоя располагается около одной из двух стационарных точек покоя $\pm z^2(D, N)$ системы (3.36), которые рождаются при $D = D_2$ в результате увеличения индекса неустойчивости нулевого решения системы (3.36). Для определенности, будем считать, что это $z^2(D, N)$. В соответствии с (3.35), каждая пара непрерывных по параметру D ветвей неподвижных точек (3.36), порожденная указанной седло-узловой бифуркацией каскада, соответствует паре приближенных непрерывных ветвей решений задачи (3.24) типа внутреннего переходного слоя с шестью точками перехода. Для бифуркации седло-узел с номером k точки перехода ветви, соответствующей устойчивым точкам покоя, обозначим: $\theta_{km}^s = \theta_{km}^s(D)$, $k = \overline{1, 5}$, $m = \overline{1, 6}$, $\theta_{k1}^s < \dots < \theta_{k6}^s$, для неустойчивой ветви — $\theta_{km}^u = \theta_{km}^u(D)$, $\theta_{k1}^u < \dots < \theta_{k6}^u$. Отметим, что две точки перехода одинаковы для любого k : для $\theta_{k2}^s = \theta_{k2}^u = \pi/2$, $\theta_{k5}^s = \theta_{k5}^u = 3\pi/2$. При фиксированном значении N и Λ были обнаружены два каскада седло-узловых бифуркаций, каждый из которых содержит 5 пар непрерывных ветвей неподвижных точек, точки перехода соответствующих им приближенным решениям, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \frac{\pi}{6} < \theta_{11}^s < \theta_{11}^u < \dots < \theta_{51}^s < \theta_{51}^u < \frac{\pi}{2}, \\
 & \frac{\pi}{2} < \theta_{53}^u < \theta_{53}^s < \dots < \theta_{13}^u < \theta_{13}^s < \frac{5\pi}{6}, \\
 & \frac{7\pi}{6} < \theta_{14}^s < \theta_{14}^u < \dots < \theta_{54}^s < \theta_{54}^u < \frac{3\pi}{2}, \\
 & \frac{3\pi}{2} < \theta_{56}^u < \theta_{56}^s < \dots < \theta_{16}^u < \theta_{16}^s < \frac{11\pi}{6}; \\
 ii) \quad & 0 < \theta_{51}^u < \theta_{51}^s < \dots < \theta_{11}^u < \theta_{11}^s < \frac{\pi}{6}, \\
 & \frac{5\pi}{6} < \theta_{13}^s < \theta_{13}^u < \dots < \theta_{53}^s < \theta_{53}^u < \pi, \\
 & \pi < \theta_{54}^u < \theta_{54}^s < \dots < \theta_{14}^u < \theta_{14}^s < \frac{7\pi}{6} \\
 & \frac{11\pi}{6} < \theta_{16}^s < \theta_{16}^u < \dots < \theta_{56}^s < \theta_{56}^u < 2\pi.
 \end{aligned}$$

Показано, что в системах (3.36) реализуются оба случая. Найдены критические значения бифуркационного параметра, 5 пар седло-узловых бифуркаций систем (3.36) каждого типа и соответствующих им приближенных решений краевой задачи (3.24).

Отметим, что была обнаружена зависимость бифуркационных значений параметра D от порядка N системы (3.36): рост порядка системы N сопровождался уменьшением критических значений параметра D , соответствующих седло-узловым бифуркациям. Движение параметра D к нулю, приводит к тому, что родившиеся в результате седло-узловых бифуркаций в системе (3.36) устойчивая и неустойчивая ветви неподвижных точек при этом медленно расходятся.

Обозначим $\varphi_k^s = \varphi_k^s(\theta, D, N)$, $\varphi_k^u = \varphi_k^u(\theta, D, N)$, $k = \overline{1, 5}$, приближенные решения (3.24), соответствующие устойчивой и неустойчивой непрерывным ветвям стационарных решений системы (3.36), которые рождаются в результате седло-узловой бифуркации с номером k .

При фиксированных значениях $\Lambda = -3/2$, $N = 31$, $D = 0.0017$ на рис. 3.6 представлены первые 4 пары приближенных решений типа $i)$, на рис. 3.7 представлены первые 4 пары приближенных решений типа $ii)$ краевой задачи (3.24), порожденные описанными каскадами седло-узловых бифуркаций в системе (3.36).

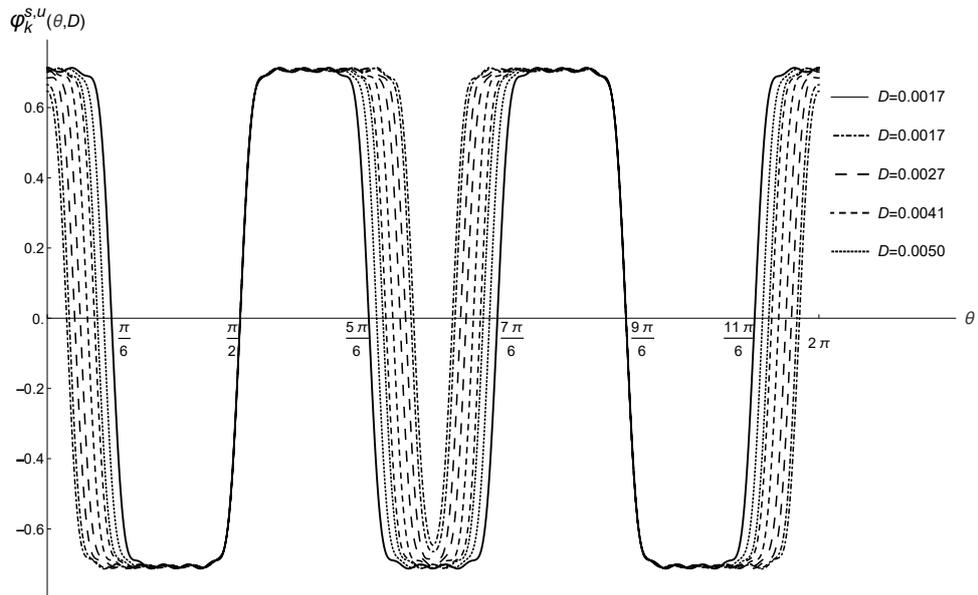


Рис. 3.6: Приближенные решения (3.24) типа $i)$, порождённые бифуркациями седло-узел при $\Lambda = -3/2$, $N = 31$, $D = 0.0017$

Рассмотрим решения $V_1^s(\theta, t, D)$, $V_1^u(\theta, t, D)$ начально-краевой задачи (3.24), для которой в качестве начальных условий выбраны прибли-

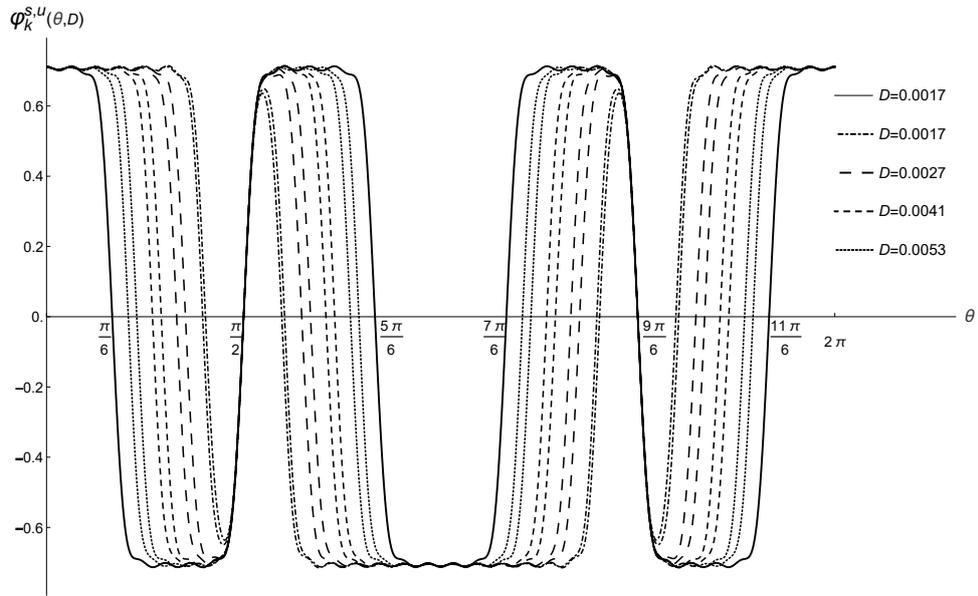


Рис. 3.7: Приближенные решения (3.24) типа *ii*), порождённые бифуркациями седло-узел при $\Lambda = -3/2$, $N = 31$, $D = 0.0017$

женные решения $\varphi_1^s(\theta, D, N)$, $\varphi_1^u(\theta, D, N)$, соответственно. В результате численных экспериментов, проведенных для фиксированных значений параметров $\Lambda = -3/2$, $N = 31$, построены $V_1^s(\theta, t, D)$ и $V_1^u(\theta, t, D)$, которые на значительных промежутках изменения времени меняются медленно, а затем на сравнительно более коротком промежутке времени они переходят в окрестность одного из устойчивых стационарных решений φ_1 из класса W_1 , что характерно для метаустойчивых структур [116, 121].

На рис. 3.8 представлено решение $V_1^s(\theta, t, D)$ задачи (3.24) для $D = 0.0017$, $\Lambda = -3/2$, φ_1^s , которое порождается седло-узловой бифуркацией при $D = 0.005$. Решение $V_1^s(\theta, t, D)$ в течении времени $t \in [0; \approx 5 \cdot 10^6]$ меняется медленно. Затем за этапом медленной эволюции наступает более короткий этап быстрого изменения, в результате которого решение $V_1^s(\theta, t, D)$ оказывается в окрестности одного из устойчивых стационарных решений φ_1 (см. рис. 3.8).

При увеличении t решение $V_1^s(\theta, t, D)$ последовательно проходит вблизи приближенных решений φ_1^s , φ_1^u , φ_2^s , φ_2^u , ... краевой задачи (3.24). Описанная динамика характерна и для решений $V_2^s(\theta, t, D)$, $V_2^u(\theta, t, D)$, ..., $V_5^u(\theta, t, D)$. Отметим, что каждая функция $V_k^s(\theta, t, D)$, $V_k^u(\theta, t, D)$ характеризуется опре-

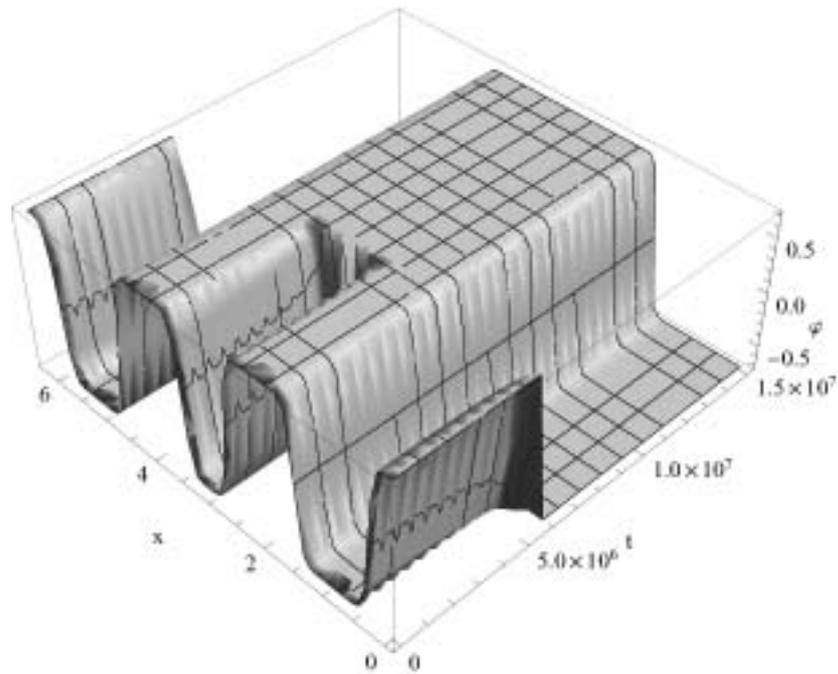


Рис. 3.8: Решение (3.24), $\Lambda = -3/2$, $D = 0.0017$

деленным промежутком медленной эволюции, так называемым, временем жизни метаустойчивой структуры. При этом время жизни метаустойчивых структур $V_k^s(\theta, t, D)$, $V_k^u(\theta, t, D)$ быстро уменьшается при переходе от одной из них к следующей в приведенной последовательности.

Указанное поведение наглядно представлена на рис. 3.9, где для различных значений времени t построены соответствующие сечения метаустойчивой структуры, представленной на рис. 3.8.

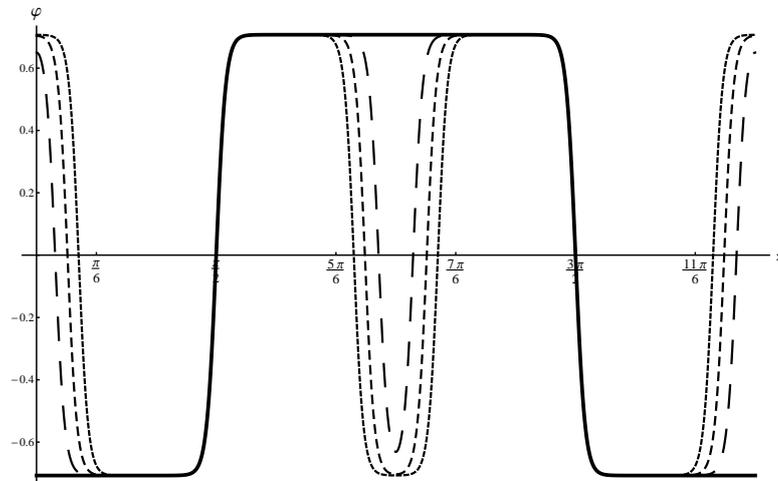


Рис. 3.9: Решение (3.24) при $t = 4000000, 4900000, 4950000, 4959600, 4959737, 4959800$, $D = 0.0017$, $\Lambda = -3/2$.

Далее будем считать, что выполняется следующее условие.

Условие 2.5. $\cos u \neq 0$.

Используя метод центральных многообразий в [47] доказана теорема, аналогичная теореме 2.4, о существовании и асимптотической форме решений $\varphi_1^*(\theta, D)$ из класса W_1 , бифурцирующих от решения из класса W_0 при уменьшении параметра D и прохождении через первое критическое значение.

В качестве иллюстрации на рис. 3.10 приведены графики функции $\varphi_1^*(\theta, D)$ для $D = 0.49, D = 0.4, D = 0.2, D = 0.1, D = 0.01$. При D близких

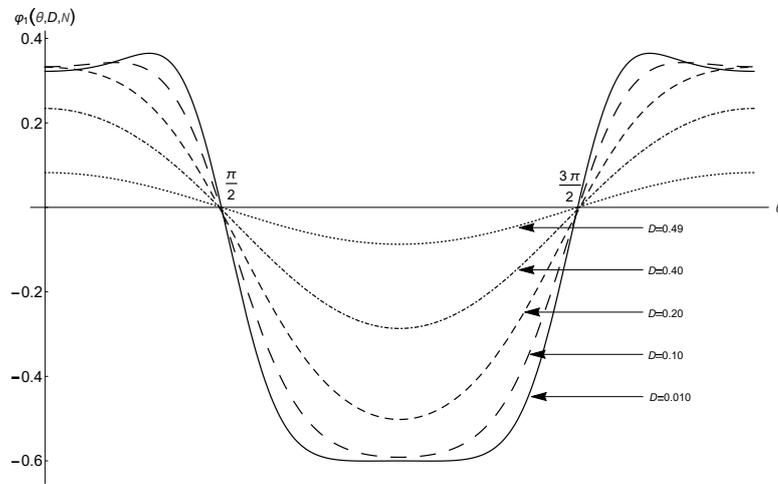


Рис. 3.10: Приближенное решение задачи (3.21) для случая $\cos w \neq 0$ при $\Lambda = -3/2$, $D = 0.49; 0.4; 0.2; 0.1; 0.01$.

к нулю $\varphi_1(\theta, D)$ является функцией типа внутреннего переходного слоя [29] с двумя точками перехода $\pi/2$ и $3\pi/2$.

При уменьшении параметра μ и прохождении значений $D_k = \sqrt{-1 - \Lambda} / (2k - 1)$, $k = 1, 2, \dots$ от $v = 0$ каждый раз ответвляется пара $\varphi_k(\theta, D)$, $\varphi_k^*(\theta, D)$ стационарных решений задачи (3.18)-(3.20) из класса W_1 .

Для нахождения $\varphi_k(\theta, D)$ используем принцип подобия [2]

$$\varphi_k(\theta, D) = \varphi_1(k\theta; kD), \quad k = 2, 3, \dots$$

Выводы к главе 3

Для начально-краевой задачи ФДУ параболического типа с оператором поворота пространственного аргумента, с краевым условием Неймана и условием 2π -периодичности, рассматриваемой на круге и окружности доказаны утверждения о существовании, асимптотической форме и характере устойчивости стационарных решений из класса W_1 , которые бифурцируют от решения из класса W_0 в результате изменения характера его устойчивости. Для круга также показано существование периодических по времени решений.

В окрестности критического значения бифуркационного параметра справедливы результаты сформулированной и доказанной методом центральных многообразий теоремы о существовании и асимптотической форме стационарного решения параболического уравнения с оператором поворота из класса W_1 , которое рождается в результате суперкритической бифуркации из меняющего характер устойчивости пространственно-однородного решения. Используя результаты применения метода центральных многообразий и согласованного с ним формального построения решения методом Галеркина, найдены представления бифурцирующих стационарных решений из класса W_1 параболического ФДУ с оператором поворота пространственного аргумента, проведен анализ их динамики в зависимости от значений бифуркационного параметра D .

Проведенные с применение пакета Wolfram Mathematica численные эксперименты показали, что применение формализма метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий, качественно и количественно приводит к верным результатам.

Применяя метод центральных многообразий и согласованный с ним метод Галеркина, построены каскады седло-узловых бифуркаций, в результате которых одновременно происходит рождение устойчивой и неустойчивой с индексом неустойчивости 1 непрерывных по параметру D ветвей стационарных точек.

Описаны условия и сценарий возникновения метаустойчивых (медленно

меняющихся) решений в задаче на окружности.

ГЛАВА 4. Структура решения для уравнения с оператором отражения на прямоугольной области

4.1. Задача для уравнений с оператором отражения аргумента на бесконечной полосе

В отличие от предыдущих случаев, где граничные области были круговыми, в данной главе рассматриваются области в \mathbb{R}^2 с границами, параллельными координатным осям в прямоугольной декартовой системе координат. Начально-краевая задача, как правило, рассматривается с краевыми условиями первого, второго и третьего рода. Особый интерес представляют условия с косой производной, частным случаем которой являются условия Дирихле или Неймана.

Рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного ФДУ параболического типа с преобразованием отражения по переменной $x \in \mathbb{R}$. В отличие от наиболее часто рассматриваемых условий Дирихле и Неймана, рассмотрим условие с косой производной.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad |y| \leq l, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=-l} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=l} = 0, \quad (4.2)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (4.3)$$

здесь $u = u(x, y, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $|y| \leq l$, $Qu(x, y, t) = u(-x, y, t)$.

Граничные условия (4.2) с косой производной определяют производные по направлению, которое образуют с внешними нормальными углами $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Представляет интерес асимптотическая форма и анализ устойчивости решений, бифурцирующих из однородного в пространстве решения (4.1) $u(x, y, t) = \hat{w} = \text{const}$, которое определяется условием 1.1 $w = K(1 + \gamma \cos w)$. Фиксируем гладкую ветвь $\hat{w} = \hat{w}(K)$, $1 + K\gamma \sin \hat{w}(K) \neq 0$ и выполняем замену $u = \hat{w} + v$, где $v = v(x, y, t)$ новая неизвестная функция, которую по прежнему будем обозначать через $u(x, y, t)$. Приходим к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = N(Qu) = g, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |y| \leq l, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} = 0, \quad (4.5)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (4.6)$$

где $L = D\Delta - I + \Lambda Q$, $N(Qu) = K(1 + \gamma \cos Qu) - \Lambda Qu \approx \Omega(Qu)^2 - \frac{\Lambda}{6}(Qu)^3$, $Qu(x, y, t) = u(-x, y, t)$, $Q^2 = I$. Через $g(x, y, t)$ обозначен нелинейный оператор $N(Qu)$, как функция, зависящая от переменных (x, y, t) . Уравнение (4.4) является неоднородным. Представим задачу (4.4)-(4.6) в виде нелинейного интегрального уравнения. Будем использовать преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}$ и Лапласа по переменной $t > 0$. Обозначим

$$U(\omega, y, t) = (\mathcal{F}u)(\omega, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) \exp[i\omega x] dx,$$

$$U(\omega, y, p) = (\mathcal{L}\mathcal{F}u)(\omega, y, p) = \int_0^{\infty} U(\omega, y, t) \exp[-pt] dt.$$

Используя свойства преобразования Фурье

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^k u(x, y, t)}{\partial x^k} \right\} (\omega, y, t) = (-i\omega)^k U(\omega, y, t)$$

и преобразования Лапласа

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right\} (x, y, p) = pU(x, y, p) - u(x, y, 0) = pU(x, y, p) - u_0(x, y),$$

задача (4.4)-(4.6) в образах Фурье-Лапласа имеет вид функционально-дифференциального уравнения второго порядка с оператором отражения $\{Q : QU(\omega, y, p) = U(-\omega, y, p), Q^2 = I\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] U(\omega, y, p) - \frac{\Lambda}{D} U(-\omega, y, p) = \\ = G(\omega, y, p) + U_0(\omega, y), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial U(\omega, \pm l, p)}{\partial y} + i\omega \operatorname{tg} \alpha U(\omega, \pm l, p) = 0. \quad (4.8)$$

Обозначая через $V(\omega, y, p) = U(-\omega, y, p)$ ($V = QU$), однородное уравнение (4.7) приводится к системе уравнений, не содержащих явно оператор Q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] U(\omega, y, p) + \frac{\Lambda}{D} V(\omega, y, p) &= 0, \\ \frac{\partial^2 V(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] V(\omega, y, p) + \frac{\Lambda}{D} U(\omega, y, p) &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Решения определяются через корни характеристического уравнения системы (4.9)

$$\lambda_j(\omega, p) = \pm \left(\omega^2 + \frac{1+p \mp \Lambda}{D} \right)^{1/2}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Лемма 4.1. Решения системы (4.9) представимы в виде

$$\begin{aligned} U(\omega, y, p) &= \sum_{s=1}^4 A_s(\omega, p) \exp[\lambda_s(\omega, p)y], \\ V(\omega, y, p) &= \sum_{s=1}^4 (-1)^s A_s(\omega, p) \exp[\lambda_s(\omega, p)y]. \end{aligned}$$

Далее получим зависимость только от двух коэффициентов.

4.1.1. Сведение к нелинейному интегральному уравнению

Лемма 4.2 Решение $U(\omega, y, p)$ представимо в виде разложения по собственным функциям краевой задачи по переменной y :

$$\begin{aligned} U(\omega, y, p) &= \frac{1}{2} A_0(\omega, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k(\omega, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y + B_k(\omega, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ G(\omega, y, p) &= \frac{1}{2} C_0(\omega, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k(\omega, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y + D_k(\omega, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ U_0(\omega, y) &= \frac{1}{2} A_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{0k}(\omega) \cos \frac{k\pi}{2l} y + B_{0k}(\omega) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} A_k(\omega, p) &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l U(\omega, y, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y dy, \\ B_k(\omega, p) &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l U(\omega, y, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y dy, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогично, выписываются коэффициенты разложения для $G(\omega, y, p)$ и $U_0(\omega, y)$.

Доказательство. В исходных переменных разложение (4.10) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ g(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ u_0(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{0k}(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Исходные коэффициенты и их изображения Фурье-Лапласа связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A_k(\omega, p) &= \left(\mathcal{FL}a_k(x, t) \right)(\omega, p), & B_k(\omega, p) &= \left(\mathcal{FL}b_k(x, t) \right)(\omega, p) \\ C_k(\omega, p) &= \left(\mathcal{FL}c_k(x, t) \right)(\omega, p), & D_k(\omega, p) &= \left(\mathcal{FL}d_k(x, t) \right)(\omega, p), \\ A_k(x, p) &= \left(\mathcal{L}a_k(x, t) \right)(x, p), & A_k(\omega, t) &= \left(\mathcal{F}a_k(x, t) \right)(\omega, t), \\ B_k(x, p) &= \left(\mathcal{L}b_k(x, t) \right)(x, p), & B_k(\omega, t) &= \left(\mathcal{F}b_k(x, t) \right)(\omega, t), \\ C_k(x, p) &= \left(\mathcal{L}c_k(x, t) \right)(x, p), & C_k(\omega, t) &= \left(\mathcal{F}c_k(x, t) \right)(\omega, t), \\ D_k(x, p) &= \left(\mathcal{L}d_k(x, t) \right)(x, p), & D_k(\omega, t) &= \left(\mathcal{F}d_k(x, t) \right)(\omega, t), \\ A_{0k}(\omega) &= \left(\mathcal{F}a_{0k}(x) \right)(\omega), & B_{0k}(\omega) &= \left(\mathcal{F}b_{0k}(x) \right)(\omega). \end{aligned}$$

Подставляя выражение (4.10) в краевую задачу (4.7), (4.8) находим коэффициенты разложения (4.11) и (4.12). \square

Теорема 4.1 Начально-краевая задача с косой производной (4.4)-(4.6) представима в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda(t - \tau) \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh} \Lambda(t - \tau) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] \right) \frac{\exp[-(t - \tau)]}{2\sqrt{\pi(t - \tau)D}} \times \\ &\quad \times \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-D \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 (t - \tau) \right] \cos \frac{k\pi}{2l} (y - \eta) \right] \times \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(K(1 + \gamma \cos u(\xi, \eta, \tau)) - \Lambda u(\xi, \eta, \tau) \right) d\eta d\xi d\tau + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi t D}} \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda t \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4tD} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{sh} \Lambda t \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4tD} \right] \right) \times \\
& \times \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-D \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 t \right] \cos \frac{k\pi}{2l} (y - \eta) \right] u_0(\xi, \eta) d\eta d\xi.
\end{aligned}$$

Доказательство. Применим метод разделения переменных. Представим $U(\omega, y, p) = \sum_k Y_k(y) Z_k(\omega, p)$. Каждый член ряда удовлетворяет однородному уравнению (4.7) и краевому условию (4.8). Далее опустим индекс k .

Разделяя переменные, для однородного уравнения получим

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] - \frac{\Lambda}{D} \frac{Z(-\omega, p)}{Z(\omega, p)} = -\nu^2. \quad (4.14)$$

Из (4.14) и условия (4.8) следует

$$Y''(y) + \nu^2 Y(y) = 0, \quad Y'(\pm l) + i\omega \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l) = 0. \quad (4.15)$$

Решение краевой задачи (4.15) $Y(y) = a \cos \nu y + b \sin \nu y$ нетривиально при условии $2(\omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \nu^2) \sin \nu l \cos \nu l = 0$. Следовательно, $\nu_k = \frac{k\pi}{2l}$, $Y_k(y) = a_k \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_k \sin \frac{k\pi}{2l} y$, $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. справедливо представление (4.10). Случай $\nu = \pm \omega \operatorname{tg} \alpha$ рассматривается отдельно.

Для $Z_k(\omega, p)$ получим систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned}
& Z_k(\omega, p) \left[\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right] - \frac{\Lambda}{D} Z_k(-\omega, p) = 0, \\
& -\frac{\Lambda}{D} Z_k(\omega, p) + Z_k(-\omega, p) \left[\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right] = 0.
\end{aligned} \quad (4.16)$$

Второе уравнение получено в результате применения оператора Q . Система (4.16) имеет нетривиальное решение при условии

$$\left(\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right)^2 - \left(\frac{\Lambda}{D} \right)^2 = 0,$$

или $q_k(\omega, p) = \pm \Lambda$, где $q_k(\omega, p) = 1 + D \left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 \right] + p$.

Коэффициенты разложения A_k и B_k определяются из неоднородной системы уравнений, содержащих оператор отражения Q :

$$\begin{aligned} q_k(\omega, p)A_k(\omega, p) - \Lambda A_k(-\omega, p) &= C_k(\omega, p) + A_{0k}(\omega), \\ q_k(\omega, p)B_k(\omega, p) - \Lambda B_k(-\omega, p) &= D_k(\omega, p) + B_{0k}(\omega). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Решения системы (4.17) имеют вид

$$\begin{aligned} A_k(\omega, p) &= K_1(\omega, p, k)C_k(\omega, p) + K_2(\omega, p, k)C_k(-\omega, p) + \\ &\quad + K_1(\omega, p, k)A_{0k}(\omega) + K_2(\omega, p, k)A_{0k}(-\omega), \\ B_k(\omega, p) &= K_1(\omega, p, k)D_k(\omega, p) + K_2(\omega, p, k)D_k(-\omega, p) + \\ &\quad + K_1(\omega, p, k)B_{0k}(\omega) + K_2(\omega, p, k)B_{0k}(-\omega), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(\omega, p, k) &= \frac{q_k(\omega, p)}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \quad K_2(\omega, p, k) = \frac{\Lambda}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \\ k_j(x, t, k) &= \left(\mathcal{F}^{-1} \mathcal{L}^{-1} \{K_j\} \right)(x, t, k), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(k_1(x - \xi, t - \tau, k) \left[c_k(\xi, \tau) \cos \frac{k\pi}{2l} y + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + d_k(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2(x - \xi, t - \tau, k) \left[c_k(-\xi, \tau) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(-\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] \right) \right] d\xi d\tau + \quad (4.18) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(k_1(x - \xi, t, k) \left[a_{0k}(\xi) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(\xi) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2(x - \xi, t, k) \left[a_{0k}(-\xi) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(-\xi) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] \right) \right] d\xi. \end{aligned}$$

С помощью обратных преобразований Фурье и Лапласа найдем $\mathcal{L}^{-1}\{K_1(\omega, p, k)\}$ и $\mathcal{L}^{-1}\{K_2(\omega, p, k)\}$, используя формулы из [36]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p+d}{(p-a)(p-b)} \right\} &= A \exp[at] + B \exp[bt], \quad A = \frac{a+d}{a-b}, \quad B = \frac{b+d}{b-a}, \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-a)(p-b)} \right\} &= A \exp[at] + B \exp[bt], \quad A = \frac{1}{a-b}, \quad B = \frac{1}{b-a}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{K_1(\omega, p, k)\} &= \frac{1}{2} \exp \left[t \left(-D \left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 \right] + \Lambda - 1 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \exp \left[t \left(-D \left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 \right] - \Lambda - 1 \right) \right], \\ \mathcal{L}^{-1}\{K_2(\omega, p, k)\} &= \frac{1}{2} \exp \left[t \left(-D \left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 \right] + \Lambda - 1 \right) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \exp \left[t \left(-D \left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 \right] - \Lambda - 1 \right) \right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}k_1(x, t, k) &= \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi t D}} \exp\left[-\frac{x^2}{4tD}\right] \exp\left[-D \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 t\right] \operatorname{ch} \Lambda t, \\ k_2(x, t, k) &= \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi t D}} \exp\left[-\frac{x^2}{4tD}\right] \exp\left[-D \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 t\right] \operatorname{sh} \Lambda t.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Преобразовывая (4.18) с учетом (4.19) и выражения для $g(x, y, t) = K(1 + \gamma \cos u(-x, y, t)) - \Lambda u(-x, y, t)$, получаем (4.13). □

4.1.2. Частный случай представления в виде интегрального уравнения

При разделении переменных также получена зависимость решения $Y(y)$ в виде $\exp[-i\omega \operatorname{tg} \alpha y]$. Рассмотрим данный случай.

После применения преобразования Фурье к (4.4)-(4.6) получим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(\omega, y, t)}{\partial t} - U(\omega, y, t) - D \left[\frac{\partial^2 U(\omega, y, t)}{\partial y^2} - \omega^2 U(\omega, y, t) \right] - \\ - \Lambda U(-\omega, y, t) = G(\omega, y, t)\end{aligned}\tag{4.20}$$

с начальным условием

$$U(\omega, y, 0) = U_0(\omega, y)\tag{4.21}$$

и краевым условием

$$\frac{\partial U(\omega, \pm l, t)}{\partial y} = (-i\omega)(\operatorname{tg} \alpha)U(\omega, \pm l, t).\tag{4.22}$$

Представим решение однородного уравнения в виде

$$U(\omega, y, t) = A(\omega, t) \exp[-i\omega \operatorname{tg} \alpha y]. \quad (4.23)$$

Решение (4.23) удовлетворяет краевому условию (4.22). Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2 Начально-краевая задача (4.20)-(4.22) представима в виде нелинейного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} k_1(x - \xi, y, t) u_0(\xi, y) d\xi + \\ & + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} k_2(x - \xi, t - \tau) g(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} g(\xi, y, \tau) &= K(1 + \gamma \cos Qu(\xi, y, \tau)) - \Lambda Qu(\xi, y, \tau), \\ k_1(x, y, t) &= \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)t]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}} \exp\left[-\frac{(x + y \operatorname{tg} \alpha)^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right], \\ k_2(x, t) &= \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)t]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Доказательство. Подставим (4.23) в (4.20), получим неоднородное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\omega, t)}{\partial t} - [1 - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)] A(\omega, t) - \Lambda Q A(\omega, t) = \\ = G(\omega, y, t) \exp[i\omega \operatorname{tg} \alpha y]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Разделяя переменные в однородном уравнении (4.26), получим:

$$\frac{T'(t) - T(t)}{T(t)} = -D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \Lambda \frac{QX(\omega)}{X(\omega)} = -\lambda,$$

откуда $T(t) = C \exp[(1 - \lambda)t]$.

Спектральную задачу для функционального уравнения

$$(\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X(\omega) + \Lambda X(-\omega) = 0.$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} (\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X(\omega) + \Lambda X_1(\omega) &= 0, \\ (\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X_1(\omega) + \Lambda X(\omega) &= 0, \end{aligned}$$

здесь $X_1(\omega) = X(-\omega)$. Существование нетривиального решения определяется условием $\lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \pm \Lambda$.

Если $\lambda = \lambda^+ = D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \Lambda$, то $X(-\omega) = -X(\omega)$, следовательно, $X(\omega)$ — произвольная нечётная функция. Если $\lambda = \lambda^- = D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \Lambda$, то $X(-\omega) = X(\omega)$, следовательно, $X(\omega)$ — произвольная чётная функция.

Тогда

$$\begin{aligned} T^\pm(t) &= C^\pm \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t], \\ A^\pm(\omega, t) &= X^\pm C^\pm \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t]. \end{aligned}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (4.20)

$$U^\pm(\omega, y, t) = C^\pm X^\pm \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y].$$

Общее решение (4.20) получаем методом вариации произвольной постоянной, частные решения неоднородного уравнения имеют вид

$$\tilde{U}^\pm(\omega, y, t) = \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau. \quad (4.27)$$

Таким образом, с учетом (4.27) для общего решения получаем

$$\begin{aligned} U(\omega, y, t) &= U^\pm(\omega, y, t) + \tilde{U}^\pm(\omega, y, t) = \\ &= C^\pm X^\pm(\omega) \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] + \\ &+ \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Из начального условия (4.21) следует, что

$$U(\omega, y, 0) = C^\pm X^\pm(\omega) \exp [-i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] = U_0(\omega, y).$$

Итак,

$$\begin{aligned} U(\omega, y, t) &= U_0(\omega, y) \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t] + \\ &+ \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp [(1 \mp \Lambda - D\omega^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau = \\ &= K_1(\omega, t)U_0(\omega, y) + \int_0^t K_2(\omega, t - \tau)G(\omega, y, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$k_1(x, y, t) = \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)t]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}} \exp\left[-\frac{(x + y \operatorname{tg} \alpha)^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right],$$

$$k_2(x, t - \tau) = \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)(t - \tau)]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(t - \tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(t - \tau)}\right].$$

Таким образом, имеет место представление (4.24). \square

Замечание. Представление (4.13) задачи (4.4)-(4.6) (теорема 4.1) в виде нелинейного интегрального уравнения не содержит оператор Q , что удобно для построения приближенного решения (итерационный процесс) $u^{n+1} = Au^n + Bu^0$, $n = 0, 1, \dots$. Считая $u^0 = 0$, получаем $u^1 = Bu^0$, т.е. видна структура решения (последнее итерационное слагаемое в (4.13)).

Аналогичное рассуждение справедливо для частного случая теоремы 4.1.

4.1.3. Дискретный случай задачи

Рассматриваем задачу (4.1)-(4.3). Соответствующее линейное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - u + \Lambda Qu, \quad t > 0 \quad |x| \leq d, \quad |y| \leq l$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right|_{\pm l} = \operatorname{tg} \alpha \left. \frac{\partial u}{\partial x(x, y, t)} \right|_{\pm l}. \quad (4.28)$$

Воспользуемся методом разделения переменных для уравнения (4.28) $u(x, y, t) = Z(x, y) \cdot T(t)$, получим

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{D\Delta Z(x, y) - Z(x, y) + \Lambda QZ(x, y)}{Z(x, y)} = -\lambda$$

В результате приходим к задаче Штурма-Лиувилля относительно $Z(x, y)$

$$\Delta Z(x, y) - \frac{1}{D}Z(x, y) + \frac{\Lambda}{D}QZ(x, y) = -\frac{\lambda}{D}Z(x, y),$$

$$\left. \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \right|_{\pm l} = \operatorname{tg} \alpha \left. \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right|_{\pm l}. \quad (4.29)$$

и уравнению для функции $T(t)$: $T'(t) + \lambda T(t) = 0$. Следовательно, $T(t) = C \exp[-\lambda t]$.

Разделение переменных в (4.29) $Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ приводит к уравнению

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{\Lambda QX(x)}{D X(x)} - \frac{1}{D} + \frac{\lambda}{D} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\nu.$$

Получаем задачи для $Y(y)$:

$$Y''(y) - \nu Y(y) = 0, \quad Y'(\pm l) - \mu \operatorname{tg} \alpha Y(\pm) = 0; \quad (4.30)$$

и для $X(x)$ (граничные условия для $x = \pm d$ пока не заданы):

$$X''(x) + \left[\frac{\lambda - 1}{D} + \nu \right] X(x) + \frac{\Lambda}{D} QX(x) = 0, \quad (4.31)$$

$$X'(x) = \mu X(x), \quad X''(x) = \mu X'(x) = \mu^2 X(x), \quad QX''(x) = Q\mu^2 X(x),$$

где $\mu = \frac{Y'(l)}{Y(l) \operatorname{tg} \alpha}$.

Пусть $\nu = 0$. Тогда $Y(y) = D_0 y + C_0$. Из краевого условия задачи (4.30) получаем $Y_0(y) = D_0 y$.

Пусть $\nu = -\kappa^2 < 0$, тогда решение краевой задачи (4.30) вида $Y(y) = C_1 \cos \kappa y + C_2 \sin \kappa y$ нетривиально при $\kappa = \frac{\pi k}{2l}$ и

$$C_2 = C_1 \frac{\mu \operatorname{tg}(\alpha) \cos \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi k}{2l} \sin \frac{\pi k}{2}}{\frac{\pi k}{2l} \cos \frac{\pi k}{2} - \mu \operatorname{tg}(\alpha) \sin \frac{\pi k}{2}}.$$

С точностью до постоянного множителя

$$Y(y) = C \left[\left(\frac{\pi k}{2l} \cos \frac{\pi k}{2} - \mu \operatorname{tg}(\alpha) \sin \frac{\pi k}{2} \right) \cos \frac{\pi k}{2l} y + \left(\mu \operatorname{tg}(\alpha) \cos \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi k}{2l} \sin \frac{\pi k}{2} \right) \sin \frac{\pi k}{2l} y \right].$$

Отсюда,

$$\text{При } k = 2m : \quad Y_{2m} = C \left[\cos \left(\frac{\pi m}{l} y \right) + \frac{l \mu \operatorname{tg}(\alpha)}{\pi m} \sin \left(\frac{\pi m}{l} y \right) \right], \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{при } k = 2m + 1 : \quad Y_{2m+1} = C \left[\cos \left(\frac{\pi(2m+1)}{2l} y \right) - \right. \\ \left. - \frac{\pi(2m+1)}{2l \mu \operatorname{tg}(\alpha)} \sin \left(\frac{\pi(2m+1)}{2l} y \right) \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Пусть $\nu = \kappa^2 > 0$. Тогда тогда решение краевой задачи (4.30) вида $Y(y) = C_1 \exp[\kappa y] + C_2 \exp[-\kappa y]$ нетривиально при $\kappa = \pm \mu \operatorname{tg} \alpha$. Тогда $Y(y) = C \exp[\mu \operatorname{tg} \alpha y]$.

Для определения функции $X(x)$ рассмотрим задачу (4.31).

Представим $X(x) = A_1 \exp[\gamma x] + A_2 \exp[-\gamma x]$. Решение краевой задачи (4.31) нетривиально при $\gamma^2 + \nu + \frac{\lambda - 1 \mp \Lambda}{D} = 0$.

Если $\gamma_{1,2}^- = \pm \sqrt{-\nu + \frac{1 - \lambda - \Lambda}{D}}$, то $A_2 = -A_1$ и

$$X^-(x) = A_1 \left(\exp[\gamma_{1,2}^- x] - \exp[-\gamma_{1,2}^- x] \right).$$

Если $\gamma_{1,2}^+ = \pm \sqrt{-\nu + \frac{1 - \lambda + \Lambda}{D}}$, то $A_2 = A_1$ и

$$X^+(x) = A_1 \left(\exp[\gamma_{1,2}^+ x] + \exp[-\gamma_{1,2}^+ x] \right).$$

Таким образом, имеют место следующие случаи:

1) $\nu = 0$:

$$Y_0(y) = D_0 y, \quad X^\pm(x) = A_1 \left(\exp[\gamma^+ x] \pm \exp[-\gamma^+ x] \right),$$

где $\gamma^\pm = \sqrt{\frac{1 - \lambda \pm \Lambda}{D}}$;

2) $\nu = -\kappa^2 = -\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2 < 0$:

$$Y_{2m} = C \left[\cos\left(\frac{\pi m}{l} y\right) + \frac{l \mu \operatorname{tg}(\alpha)}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{l} y\right) \right],$$

$$X^\pm(x) = A_1 \left(\exp[\gamma^+ x] \pm \exp[-\gamma^+ x] \right),$$

где $\gamma^\pm = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 + \frac{1 - \lambda \pm \Lambda}{D}}$,

$$Y_{2m+1} = C \left[\cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2l} y\right) - \frac{\pi(2m+1)}{2l \mu \operatorname{tg}(\alpha)} \sin\left(\frac{\pi(2m+1)}{2l} y\right) \right],$$

$$X^\pm(x) = A_1 \left(\exp[\gamma^+ x] \pm \exp[-\gamma^+ x] \right),$$

где $\gamma^\pm = \sqrt{\left(\frac{\pi(2m+1)}{2l}\right)^2 + \frac{1-\lambda \pm \Lambda}{D}}$;
 3) $\nu = \kappa^2 = \mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha > 0$:

$$Y(y) = C \exp[\mu \operatorname{tg} \alpha y], \quad X^\pm(x) = A_1 \left(\exp[\gamma^+ x] \pm \exp[-\gamma^+ x] \right),$$

где $\gamma^\pm = \sqrt{-\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1-\lambda \pm \Lambda}{D}}$.

Рассмотрим

$$X''(x) + \left[\frac{\lambda-1}{D} + \nu \right] X(x) + \frac{\Lambda}{D} Q X(x) = 0.$$

Обозначим $X_1(x) = X(x)$, $X_2(x) = X_1(-x) = X(-x)$, получаем систему

$$\begin{aligned} X_1''(x) + \left[\frac{\lambda-1}{D} + \nu \right] X_1(x) + \frac{\Lambda}{D} X_2(x) &= 0, \\ X_2''(x) + \left[\frac{\lambda-1}{D} + \nu \right] X_2(x) + \frac{\Lambda}{D} X_1(x) &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Решение $X_1(x) = a \exp[\alpha x]$, $X_2(x) = b \exp[-\alpha x]$ системы (4.34) нетривиально при $\alpha^2 = \frac{1-\lambda \pm \Lambda}{D} - \nu$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} X(x) = & A_1 \cos \sqrt{\nu + \frac{\lambda-1-\Lambda}{D}} x + A_2 \sin \sqrt{\nu + \frac{\lambda-1-\Lambda}{D}} x + \\ & + A_3 \cos \sqrt{\nu + \frac{\lambda-1+\Lambda}{D}} x + A_4 \sin \sqrt{\nu + \frac{\lambda-1+\Lambda}{D}} x. \end{aligned}$$

Из условия 2π -периодичности функции $X(x)$ находим

$$\lambda^\pm = D(n^2 - \nu) + 1 \pm \Lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При $\nu = -\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2$: $\lambda^\pm = \left(n^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right) D + 1 \pm \Lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Для λ^+ бифуркационное значение параметра $D = -\frac{(\Lambda+1)4l^2}{\pi^2 k^2 + 4l^2 n^2}$. Учитывая, что $0 < D < 1$, находим ограничение на значение параметра Λ :

$$-\left(1 + n^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right) < \Lambda < -1.$$

Для λ^- бифуркационное значение параметра $D = \frac{4(\Lambda - 1)l^2}{\pi^2 k^2 + 4l^2 n^2}$. Учитывая, что $0 < D < 1$, находим ограничение на значения Λ :

$$1 < \Lambda < 1 + n^2 + \left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2,$$

что противоречит условию 2.1.

Используя полученный результат, далее рассмотрим частный случай задачи для прямоугольника $S^Q = \{(x, y) \mid |x| \leq d, |y| \leq l\}$ при условии $\operatorname{tg} \alpha = 0$, что соответствует условиям Неймана.

4.2. Задача для уравнений с оператором отражения аргумента с условием периодичности на прямоугольнике

Рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного ФДУ параболического типа с преобразованием отражения по переменной $x \in \mathbb{R}$ с краевыми с косою производной. В прямоугольнике $S = \{(x, y) \mid -d < x < d, -l < y < l\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u + u - \Lambda Qu = f(u) = K(1 + \gamma \cos Qu) - \Lambda Qu \equiv g(x, y, t), \quad (4.35)$$

где $(x, y) \in S, t > 0, u = u(x, y, t)$ [1], [89] с инволюцией (преобразованием отражения) $Qu = u(-x, y, t)$, краевыми условиями с косою производной на границах $y = \pm l$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\pm l} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\pm l}, \quad (4.36)$$

с краевыми условиями на границах $x = \pm d$ либо с косою производной

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\pm d} = \operatorname{tg} \beta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\pm d}, \quad (4.37)$$

либо с условием 2π -периодичности ($d = \pi$)

$$u(x + 2\pi, y, t) = u(x, y, t) \quad (4.38)$$

и начальным условием

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (4.39)$$

Здесь Δu — двумерный оператор Лапласа в декартовой системе координат (x, y) , $D > 0$, $K > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Пусть $w = w(x, y, t)$ — одно из решений задачи (4.35)–(4.39), выполним замену $u = w + v$, где $v = v(x, y, t)$ — новая неизвестная функция. Тогда задача (4.35)–(4.39) относительно v примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v &= D\Delta v - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qv, Qw), \quad (x, y) \in S, \quad t \geq 0, \\ v(x + 2\pi, y, t) &= v(x, y, t), \end{aligned} \quad (4.40)$$

с соответствующими краевыми условиями для функции v , где $f(Qw, Qv) = K\gamma (\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv))$ [125].

Рассмотрим одно из модельных уравнений задачи (4.40) [49]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v + \Lambda Q_h v + \Omega Q_h v^2 - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3, \quad t \geq 0, \quad (4.41)$$

где Λ , Ω определяются равенствами (1.9). Согласно (4.36)–(4.39) им соответствуют две линеаризованные задачи: с краевыми условиями с косой производной на горизонтальных и вертикальных границах области

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v - v + \Lambda Qv, \quad t > 0, \quad |x| < d, \quad |y| < l, \\ \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm l} &= \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{y=\pm l}, \\ \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{x=\pm d} &= \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=\pm d}, \\ v(x, y, 0) &= v_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.42)$$

и с краевыми условиями с косой производной на горизонтальных границах и условием периодичности на вертикальных границах

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v - v + \Lambda Qv, \quad t > 0, \quad |x| < \pi, \quad |y| < l, \\ \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm l} &= \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{y=\pm l}, \quad v(x + 2\pi, y, t) = v(x, y, t) \\ v(x, y, 0) &= v_0(x, y). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Линеаризованное уравнение задач (4.42), (4.43) представим в операторной форме $\frac{\partial v}{\partial t} - Lv = 0$, где $Lv = L_0v + L_Qv$, $L_0v = -D\Delta v$, $L_Qv = v - \Lambda Qv$.

Обозначим $\psi_{n,m}$ — собственные функции операторов L_0 и L :

$$\begin{aligned} L_0\psi_{n,m} &= -\Delta\psi_{n,m} = \lambda_{n,m}\psi_{n,m}, \\ L\psi_{n,m} &= \tilde{\lambda}_{n,m}\psi_{n,m}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Линейный оператор L с областью определения H^2 , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве H , является самосопряженным оператором. Найдем собственные функции и собственные значения оператора L .

4.2.1. Спектральная задача

Воспользуемся методом разделения переменных для уравнения $Lv = 0$. Представим $v(x, y, t) = Z(x, y) \cdot T(t)$. Получим задачу для $Z(x, y)$:

$$\Delta Z(x, y) - \frac{1}{D}Z(x, y) + \frac{\Lambda}{D}QZ(x, y) = -\frac{\tilde{\lambda}}{D}Z(x, y)$$

с условиями первого типа

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} &= 0, \\ \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} - \operatorname{tg} \beta \frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{x=\pm d} &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

или второго типа

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z(x, y)}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial Z(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} &= 0, \\ Z(x + 2\pi, y) &= Z(x, y) \end{aligned} \quad (4.46)$$

и уравнение для функции $T(t)$: $T'(t) + \tilde{\lambda}T(t) = 0$. Следовательно, $T(t) = C \exp[-\tilde{\lambda}t]$.

Предварительно в пространстве H рассмотрим спектральную задачу для дискретного самосопряженного оператора L_0 : $L_0\varphi = -\Delta Z\varphi$

$$L_0\varphi = \lambda\varphi \quad (4.47)$$

с краевыми условиями (4.45) или (4.46) .

Лемма 4.3. Оператор L_0 , определенный краевой задачей (4.47), (4.45), имеет в пространстве $H = L_2(S^d)$ полную ортонормированную систему собственных функций

$$\varphi_{n,m} = \left[\cos \frac{n\pi}{2d}x \pm i \sin \frac{n\pi}{2d}x \right] \left[dm \cos \frac{\pi m}{2l}y \pm iln \sin \frac{\pi m}{2l}y \right], \quad (4.48)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Соответствующие собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2d} \right)^2. \quad (4.49)$$

Доказательство. Разделяя переменные $Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ в уравнении задачи (4.47), получим $-(X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y)) = \lambda X(x) \cdot Y(y)$. Отсюда $X''(x) + (\lambda - \nu) X(x) = 0$ и $Y''(y) + \nu Y(y) = 0$.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0 \quad (4.50)$$

с косой производной на границе

$$\left(X(x)Y'(y) - \operatorname{tg} \alpha X'(x)Y(y) \right) \Big|_{y=\pm l} = 0. \quad (4.51)$$

Из условия (4.51) $X'(x) = \frac{Y'(\pm l)}{\operatorname{tg} \alpha Y(\pm l)} X(x) = \mu X(x)$ получаем краевые условия

$$Y'(\pm l) - \mu \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l) = 0. \quad (4.52)$$

Пусть $\nu = \kappa^2 > 0$. Решение

$$Y(y) = A \cos \kappa y + B \sin \kappa y. \quad (4.53)$$

краевой задачи (4.50), (4.52) нетривиально при $\kappa = \frac{m\pi}{2l}$ или $\mu^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \kappa^2 = 0$.

При $\nu_m = \kappa^2 = \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2$ решение (4.53) имеет вид

$$Y_m(y) = A_m \cos \frac{m\pi}{2l}y + B_m \sin \frac{m\pi}{2l}y.$$

Переходим к уравнению относительно $X(x)$:

$$X''(x) + (\lambda - \nu_m) X(x) = 0$$

с условиями

$$\begin{aligned} X'(\pm d)Y(y) - \operatorname{tg} \beta X(\pm d)Y'(y) &= 0, \\ X'(x) &= \mu X(x). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Из (4.54) получаем $Y'(y) = \eta Y(y)$, где $\eta = \frac{X'(\pm d)}{\operatorname{tg} \beta X(\pm d)}$ и приходим к задаче

$$\begin{aligned} X''(x) + (\lambda - \nu_m)X(x) &= 0, \\ X'(\pm d) - \eta \operatorname{tg} \beta X(\pm d) &= 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Пусть $\lambda - \nu_m = \lambda - \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 = 0$. Решение $X(x) = Ax + B$ краевой задачи (4.55) нетривиально при $\eta = 0$. Следовательно, $A = 0$, $B \neq 0$.

Пусть $\lambda - \nu_m = \lambda - \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 = \xi^2$. Решение

$$X(x) = a \cos \xi x + b \sin \xi x \quad (4.56)$$

краевой задачи (4.55) нетривиально при $\xi = \frac{n\pi}{2d}$ или $\eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \xi^2 = 0$.

Рассмотрим случай $\xi^2 = \left(\frac{n\pi}{2d}\right)^2$. Решение (4.56), представим в виде

$$\begin{aligned} X_n(x) &= a \cos \frac{n\pi}{2d}x + b \sin \frac{n\pi}{2d}x, \\ \lambda_{n,m} &= \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2d}\right)^2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Учитывая $X'_n(x) = \mu X_n(x)$, приходим к равенству

$$-a \frac{n\pi}{2d} \sin \frac{n\pi}{2d}x + b \frac{n\pi}{2d} \cos \frac{n\pi}{2d}x = \mu \left(a \cos \frac{n\pi}{2d}x + b \sin \frac{n\pi}{2d}x \right). \quad (4.58)$$

Следовательно, $b \frac{n\pi}{2d} = \mu a$, $\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{2d}\right)^2$.

Отсюда, учитывая (4.57), с точностью до постоянного множителя находим

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{2d}x \pm i \sin \frac{n\pi}{2d}x.$$

Из краевого условия (4.51)

$$Y'(l) = \mu \operatorname{tg} \alpha Y(l) = \pm i \frac{n\pi}{2d} \operatorname{tg} \alpha Y(l)$$

следует, что

$$B_m = \pm i \frac{\pi n}{2d\kappa} \operatorname{tg} \alpha A_m = \pm i \frac{ln}{dm} \operatorname{tg} \alpha A_m.$$

Тогда с точностью до постоянного множителя решение (4.50) имеет вид

$$Y_{n,m}(y) = A \left[dm \cos \frac{\pi m}{2l} y \pm iln \sin \frac{\pi m}{2l} y \right].$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя собственные функции оператора L_0 определяются равенством (4.48), соответствующие собственные значения – равенством (4.49). \square

Отметим, что при доказательстве леммы 4.3 также были получены значения $\kappa = \pm i\mu \operatorname{tg} \alpha$ и $\xi = \pm i \frac{n\pi}{2d}$. Исследования соответствующей спектральной задачи будет рассмотрено позже.

Далее, в пространстве H рассмотрим спектральную задачу для дискретного самосопряженного оператора $L_0 : L_0\psi = -\Delta\psi$ и краевыми условиями (4.46) 2π -периодичности на границе $x = \pm d = \pm\pi$ и условием с косой производной на границе $y = \pm l$. Доказано следующее утверждение.

Лемма 4.4. Оператор L_0 , определенный краевой задачей (4.47), (4.46), имеет в пространстве $H = L_2(S^d)$ полную ортонормированную систему собственных функций

$$\begin{aligned} \psi_{n,2s} &= \begin{bmatrix} \cos nx \pm i \sin nx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y \end{bmatrix}, \\ \psi_{n,2s-1} &= \begin{bmatrix} \cos nx \pm i \sin nx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm \\ \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Соответствующие собственные значения определяются равенством

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2. \quad (4.60)$$

Доказательство. Как в лемме 4.3 находим функцию $Y_m(y)$. Для определения функции $X_n(x)$ вместо условия (4.42) используем условие 2π -периодичности, тогда

$$X(x + 2\pi) - X(x) = 2 \sin \xi\pi (b \cos \xi(x + \pi) - a \sin \xi(x + \pi)) = 0.$$

Отсюда $\xi = n$. Учитывая (4.56), $X_n(x) = a \cos nx + b \sin nx$,

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + n^2.$$

Так как $X'(x) = \mu X(x)$, то $-an \sin nx + bn \cos nx = \mu(a \cos nx + b \sin nx)$. Отсюда, $b = -a \frac{n}{\mu}$, $\mu^2 = -n^2$, $Y'(\pm l) = \mu \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l) = \pm in \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l)$. Следовательно, учитывая (4.2.1), получаем

$$B_m = \pm \frac{iln \operatorname{tg} \alpha}{\pi s} A_m \quad (m = 2s), \quad B_m = \pm \frac{i\pi(2s-1)}{2ln \operatorname{tg} \alpha} A_m \quad (m = 2s-1).$$

Тогда с точностью до постоянного множителя решение (4.53) имеет вид

$$Y_{n,2s}(y) = \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y,$$

$$Y_{n,2s-1}(y) = 2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y.$$

Таким образом, в случае условия 2π -периодичности функции $\psi_{n,m}$ определяются равенством (4.59), соответствующие собственные значения определяются равенством (4.60). \square

Далее, в пространстве H рассмотрим спектральную задачу для оператора $L = L_0 + L_Q : L\psi^Q = \lambda\psi^Q$ и краевыми условиями (4.46) 2π -периодичности на границе $x = \pm\pi$ и условием с косой производной на границе $y = \pm l$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.5. Оператор L_Q , определяемый краевой задачей

$$L\psi^Q = \lambda^Q \psi^Q,$$

$$\left(\frac{\partial \psi^Q(x, y)}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \psi^Q(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} = 0,$$

$$\psi^Q(x + 2\pi, y) = \psi^Q(x, y),$$

где $L = L_0 + L_Q = -\Delta v + v - \Lambda Qv$,

$$\psi^Q(x, y) = X_n(x)Y_{n,m}(y) = \left[a \cos nx + b \sin nx \right] Y_{n,m}(y), \quad (4.61)$$

имеет в пространстве $H = L_2(S^d)$ ортонормированную систему собственных функций

$$\psi_{n,m}^s = \sin nx Y_{n,m}, \quad \psi_{n,m}^c = \cos nx Y_{n,m},$$

которым соответствуют собственные значения

$$\tilde{\lambda}_{n,m}^s = D \left(\left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) + 1 + \Lambda, \tilde{\lambda}_{n,m}^c = D \left(\left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) + 1 - \Lambda.$$

Доказательство. Для собственных функций оператора L_Q , определяемого краевой задачей (4.47), (4.46) (лемма 4.3) рассматриваем спектральную задачу

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}^Q - \Lambda Q \psi_{n,m}^Q - \lambda^Q \psi_{n,m}^Q &= 0, \\ \left(\frac{\partial \psi^Q(x, y)}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial \psi^Q(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} &= 0, \\ \psi^Q(x + 2\pi, y) &= \psi^Q(x, y). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Решение (4.61) краевой задачи (4.62) нетривиально при $\lambda^Q = 1 \pm \Lambda$.

Таким образом, если $\lambda^Q = 1 + \Lambda$, то

$$\psi_{n,m}^s = \sin nx Y_{n,m}, \tilde{\lambda}_n^s = D\lambda_{n,m} + \lambda^Q = D \left(\left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) + 1 + \Lambda.$$

Если $\lambda^Q = 1 - \Lambda$, то

$$\psi_{n,m}^Q = \cos nx Y_{n,m}, \tilde{\lambda}_n^c = D\lambda_{n,m} + \lambda^Q = D \left(\left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) + 1 - \Lambda.$$

□

Учитывая результат леммы 4.5, получаем

$$\begin{aligned} Z(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} Z_{n,m} = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} X_n(x) Y_{n,m}(y) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin nx \left[2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y + \right. \\ &\quad \left. + \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos kx \left[2lk \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y + \right. \\ &\quad \left. + \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm ilk \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y \right], \\ \tilde{\lambda}_{n,m}^s &= D\lambda_{n,m} + \lambda^Q = D \left(\left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) + 1 + \Lambda, \\ \tilde{\lambda}_{n,m}^c &= D\lambda_{n,m} + \lambda^Q = D \left(\left(\frac{m\pi}{2l} \right)^2 + n^2 \right) + 1 - \Lambda. \end{aligned}$$

Тогда

$$v(x, y, t) = \left(\sum_{n=1, s=1}^{\infty} A_{m,n} \sin nx \left[2ln \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm iln \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y \right] \right) \exp[-\tilde{\lambda}_{n,m}^s t]$$

или

$$v(x, y, t) = \left(\sum_{n=1, s=1}^{\infty} B_{m,n} \cos kx \left[2lk \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi(2s-1)}{2l} y \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm i\pi(2s-1) \sin \frac{\pi(2s-1)}{2l} y + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi s \cos \frac{\pi s}{l} y \pm ilk \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\pi s}{l} y \right] \right) C \exp[-\tilde{\lambda}_{n,m}^c t].$$

4.2.2. Метод центральных многообразий

Рассмотрим одну из модельных задач

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = D\Delta v + \Lambda Q_h v - \frac{\Lambda}{6} Q_h v^3, \quad |x| < \pi, \quad |y| < l, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=\pm l} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{y=\pm l}, \\ v(x + 2\pi, y, t) = v(x, y, t), \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y). \quad (4.63)$$

Для получения асимптотической формы стационарных решений из класса W_1 задачи (4.63), бифурцирующих из решения $w \in W_0$, воспользуемся методом центральных многообразий.

Устойчивость решения определяется знаком $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^s)$ и $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^c)$. При выполнении условия 2.1 существуют значения n, m , при которых $Re(\tilde{\lambda}_{n,m}^s) = 0$. Обозначим $D_{n,m} = \left(-1 - \Lambda + \tilde{\lambda}_{n,m}^s\right) \left(\left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 + n^2\right)^{-1}$ бифуркационные значения параметра D . Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3. При $\Lambda < -1$ существует $\mu > 0$, такое что для значений параметра D , удовлетворяющих неравенству $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$,

где $D_{1,1} = - \left(1 + \Lambda + \tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) \left(\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 + 1 \right)^{-1}$, в окрестности нулевого решения начально-краевой задачи (4.63) существует непрерывная ветвь стационарных точек $z = z(D) > 0$ уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \tilde{\lambda}_{1,1}^s(D)z - \frac{3\Lambda}{32}K_{1,4}^-z^3 + \frac{\Lambda^2K_{1,4}^-}{1024K_{1,20}^-} \left[\frac{K_{3,20}^-K_{1,12}^-}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right)} + \right. \\ & \left. + \frac{K_{1,4}^+K_{1,20}^+}{3} \left(\frac{9}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} - \frac{1}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \right] z^5 + \dots, \end{aligned}$$

где $K_{\eta,\xi}^\pm = \eta^2\pi^2 \pm \xi^2l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$, которой соответствуют решения из класса W_1

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, D) = & \sin x \left(2l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{2l}y + i\pi \sin \frac{\pi}{2l}y \right) z(t) + \\ & + \left[p_{3,1}(x, D) \left(6l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{2l}y + i\pi \sin \frac{\pi}{2l}y \right) + \right. \\ & \left. + p_{3,3}(x, D) \left(6l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{3\pi}{2l}y + 3il \sin \frac{3\pi}{2l}y \right) \right] z(t)^3 + \\ & + \left[p_{5,1}(x, D) \left(10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{2l}y + i\pi \sin \frac{\pi}{2l}y \right) + \right. \\ & \left. + p_{5,3}(x, D) \left(10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{3\pi}{2l}y + 3i\pi \sin \frac{3\pi}{2l}y \right) + \right. \\ & \left. + p_{5,5}(x, D) \left(10l \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{5\pi}{2l}y + 5i\pi \sin \frac{5\pi}{2l}y \right) \right] z^5(t) + \\ & + \xi(z, x, y, D) \Big|_{z=z(D)}, \end{aligned} \tag{4.64}$$

где

$$p_{3,1}(x, D) = \frac{\Lambda K_{1,4}^- K_{1,12}^-}{32 \left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s \right) K_{1,36}^-} \sin 3x, \tag{4.65}$$

$$p_{3,3} = \frac{\Lambda K_{1,4}^+}{288} \left[\frac{3}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s \right)} \sin x - \frac{1}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s \right)} \sin 3x \right], \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
p_{5,1} = & \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{1024 \left(5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s\right) K_{1,100}^-} \left[-\frac{K_{1,4}^+ K_{1,20}^+}{3} \left(\frac{3}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{2}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) + \frac{K_{1,12}^- (K_{3,20}^- K_{1,36}^- - 192\pi^2 l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s\right) K_{1,36}^-} \right] \sin 3x + \\
& + \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{3072 \left(5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{5,1}^s\right) K_{1,100}^-} \left(\frac{3K_{3,20}^- K_{1,12}^-}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s} + \frac{K_{1,4}^+ K_{1,20}^+}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \sin 5x,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
p_{5,3} = & \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{1024 \left(5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s\right) K_{9,100}^-} \left[-\frac{(K_{1,12}^-)^2 K_{3,20}^+}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s\right) K_{1,36}^-} + \right. \\
& \left. + \frac{K_{1,4}^+ K_{3,20}^-}{3} \left(\frac{9}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} - \frac{2}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \right] \sin x + \\
& + \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{3072 \left(5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s\right) K_{9,100}^-} \left[\frac{6(K_{1,12}^-)^2 K_{3,20}^+}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s\right) K_{1,36}^-} + \right. \\
& \left. + K_{1,4}^+ K_{3,20}^- \left(\frac{6}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} - \frac{5}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \right] \sin 3x + \\
& + \frac{\Lambda^2 K_{1,4}^-}{3072 \left(5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{5,3}^s\right) K_{9,100}^-} \left[\frac{K_{1,4}^+ K_{3,20}^-}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} - \frac{3(K_{1,12}^-)^2 K_{3,20}^+}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,1}^s\right) K_{1,36}^-} \right] \sin 5x, \\
p_{5,5} = & \frac{\Lambda^2 (K_{1,4}^+)^2}{15360} \left[\frac{1}{5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,5}^s} \left(\frac{9}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} + \frac{1}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \sin x - \right. \\
& - \frac{1}{5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,5}^s} \left(\frac{3}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{1,3}^s} + \frac{2}{3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s} \right) \sin 3x + \\
& \left. + \frac{1}{\left(5\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{5,5}^s\right)} \frac{1}{\left(3\tilde{\lambda}_{1,1}^s - \tilde{\lambda}_{3,3}^s\right)} \sin 5x \right].
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Решение $\varphi(x, y, D)$ – устойчивое.

Доказательство. В окрестности решения $v = 0$ из класса W_0 задачи (4.63) для D , удовлетворяющих неравенству $D_{1,1} - \mu < D < D_{1,1}$ существует цен-

тральное многообразие [106] представимое в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, D) = & X_1(x)Y_{1,1}(y)z(t) + \\ & + \left[p_{3,1}(x, D)Y_{3,1}(y) + p_{3,3}(x, D)Y_{3,3}(y) \right] z(t)^3 + \\ & + \left[p_{5,1}(x, D)Y_{5,1}(y) + p_{5,4}(x, D)Y_{5,3}(y) + p_{5,5}(x, D)Y_{5,5}(y) \right] z(t)^5 + \\ & + \xi(z, x, y, D) \Big|_{z=z(D)}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

где $p_{3,1}(x, D)$, $p_{3,3}(x, D)$, $p_{5,1}(x, D)$, $p_{5,3}(x, D)$, $p_{5,5}(x, D)$ функции из пространства $L_2(S)$.

На многообразии (4.70) уравнение (4.63) принимает вид

$$\dot{z} = \lambda_{1,1}(D)z + C_3 z^3 + C_5 z^5 + \dots \quad (4.71)$$

Найдем коэффициенты разложений (4.70) и (4.71), ограничиваясь рассмотрением трех слагаемых. Подставим (4.70) и (4.71) в уравнение (4.63). Приравнявая коэффициенты при $z(t)$ и учитывая (4.2.1), приходим к тождеству $\tilde{\lambda}_{1,1}^s \equiv D \left(1 + \frac{\pi^2}{4l^2} \right) + 1 + \Lambda$.

Приравнявая коэффициенты в (4.63) при $z^3(t)$, получаем

$$\begin{aligned} & \left(-Dp_{3,1}''(x) + \left(1 + \frac{\pi^2}{4l^2} D - 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{3,1}(x) - \Lambda p_{3,1}(-x) \right) Y_{3,1}(y) + \\ & + \left(-Dp_{3,3}''(x) + \left(1 + \frac{9\pi^2}{4l^2} D - 3\tilde{\lambda}_{1,1}^s \right) p_{3,3}(x) - \Lambda p_{3,3}(-x) \right) Y_{3,3}(y) + \\ & + C_3 \sin x Y_{1,1}(y) - \frac{\Lambda}{6} \sin^3 x Y_{1,1}^3(y) = 0. \end{aligned}$$

Из условия ортогональности собственных функций находим $C_3 = -\frac{3\Lambda}{32} (\pi^2 - 4l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = -\frac{3\Lambda}{32} K_{1,4}^-$ где $K_{\eta,\xi}^\pm = \eta^2 \pi^2 \pm \xi^2 l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ и равенства (4.65), (4.66) для определения функций $p_{3,1}(x)$ и $p_{3,3}(x)$.

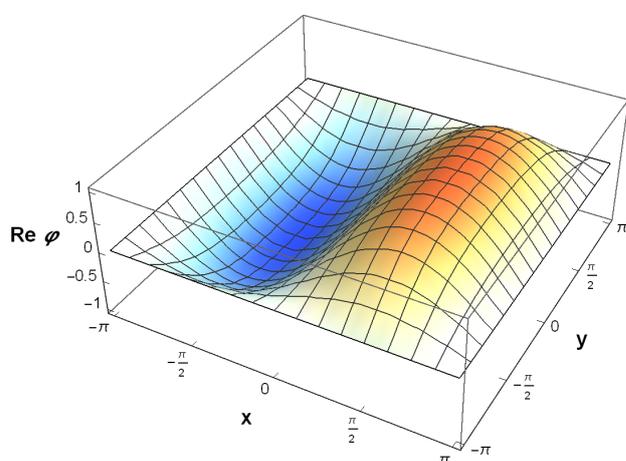
Приравнявая коэффициенты в уравнении (4.63) при $z^5(t)$, получаем равенство для определения функций $p_{5,1}(x)$, $p_{5,3}(x)$, $p_{5,5}(x)$. Учитывая ортогональность собственных функций, найденные ранее C_3 , $p_{3,1}(x)$, $p_{3,3}(x)$ и условие разрешимости уравнения (?), определяем значение C_5 и приходим к равенствам (4.67), (4.68), (4.69) для $p_{5,1}(x, D)$, $p_{5,3}(x, D)$, $p_{5,5}(x, D)$.

Используя описанный алгоритм, процесс может быть продолжен. \square

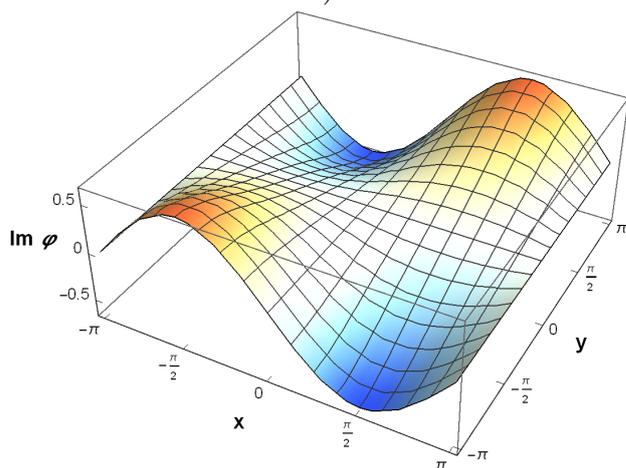
Теорема носит локальный характер. Используя приближенное равенство

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, D) \approx & X_1(x)Y_{1,1}(y)z(t) + \\ & + p_{3,1}(x, D) \left[Y_{3,1}(y) + p_{3,3}(x, D)Y_{3,3}(y) \right] z(t)^2 + \left[p_{5,1}(x, D)Y_{5,1}(y) + \right. \\ & \left. + p_{5,3}(x, D)Y_{5,3}(y) + p_{5,5}(x, D)Y_{5,5}(y) \right] z^5(t) + \xi(z, x, y, D) \Big|_{z=z(D)}, \end{aligned}$$

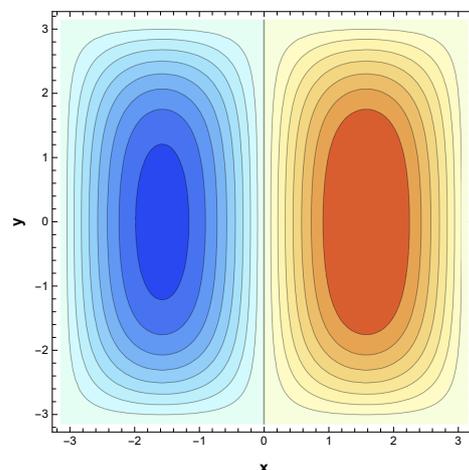
в пакете Wolfram Mathematica 11.3 были проведены численные эксперименты по построению приближенных пространственно-неоднородных стационарных решений задачи (4.63) с различными значениями параметров. Результаты приведены на рисунках 4.1, 4.2.



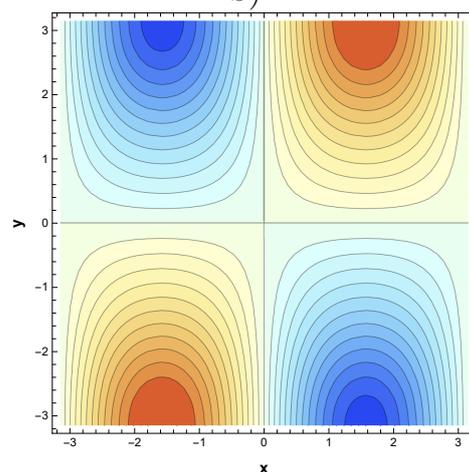
a)



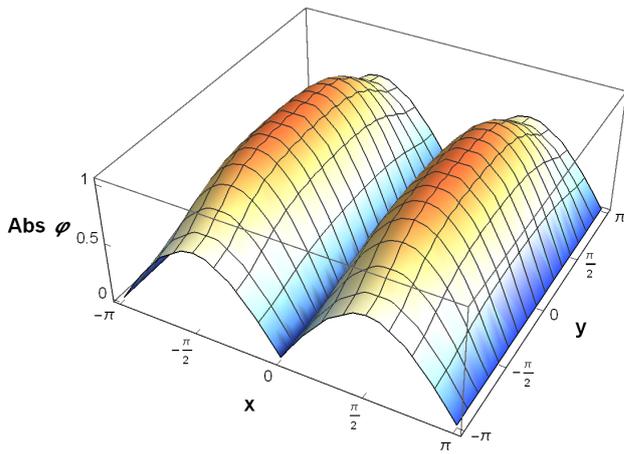
c)



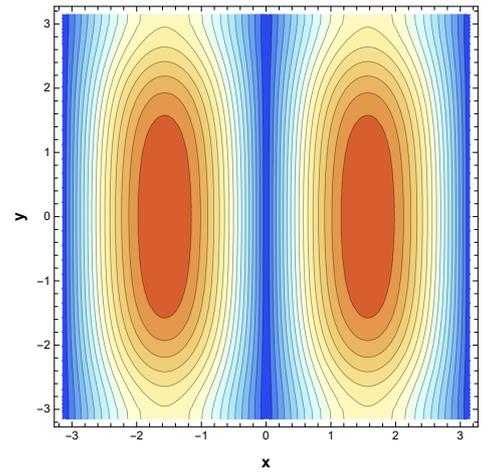
b)



d)

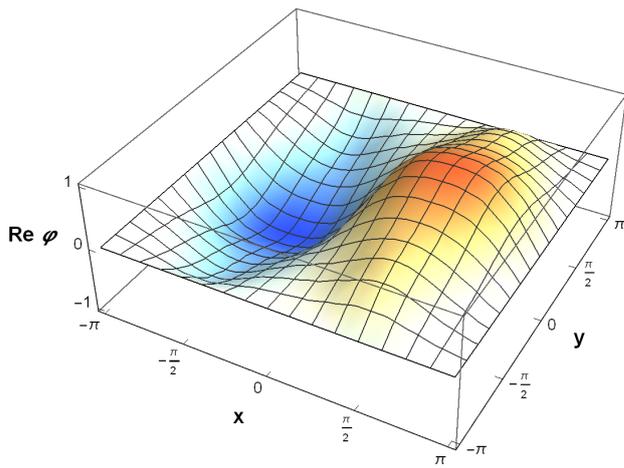


e)

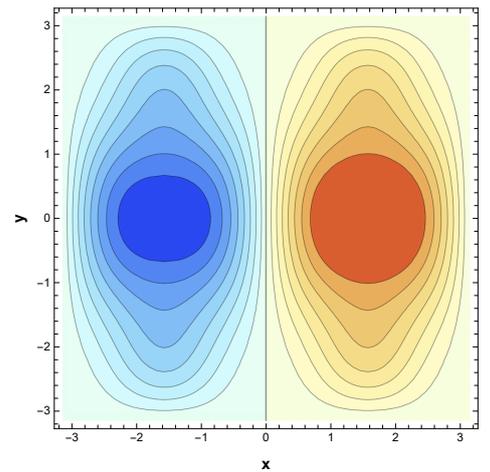


f)

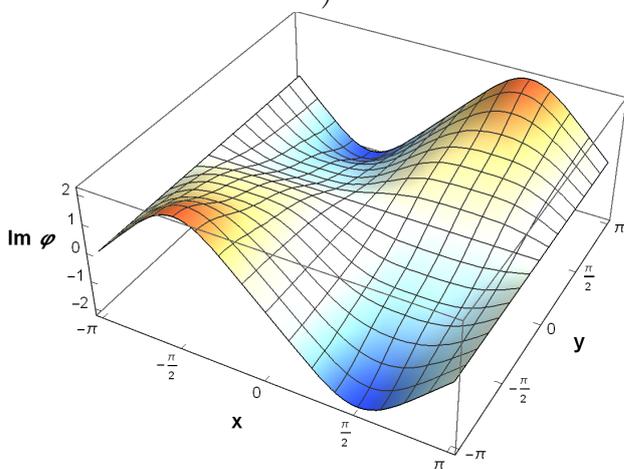
Рис. 4.1: Приближенное решение задачи (4.63) при $\alpha = \pi/4$, $D = 0.3$, $\Lambda = -3/2$: а) действительная часть решения; б) линии уровня действительной части решения; с) мнимая часть решения; д) линии уровня мнимой части решения; е) абсолютная величина решения; ф) линии уровня абсолютной величины решения.



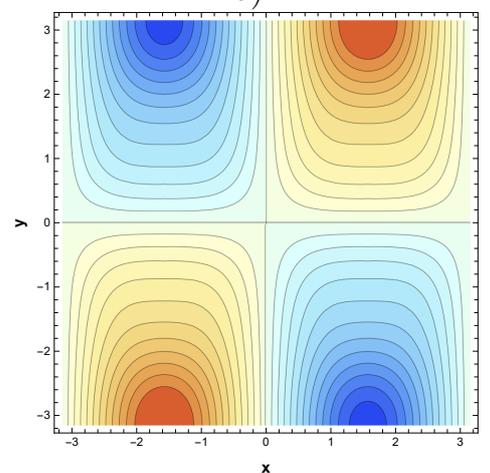
а)



б)



с)



д)

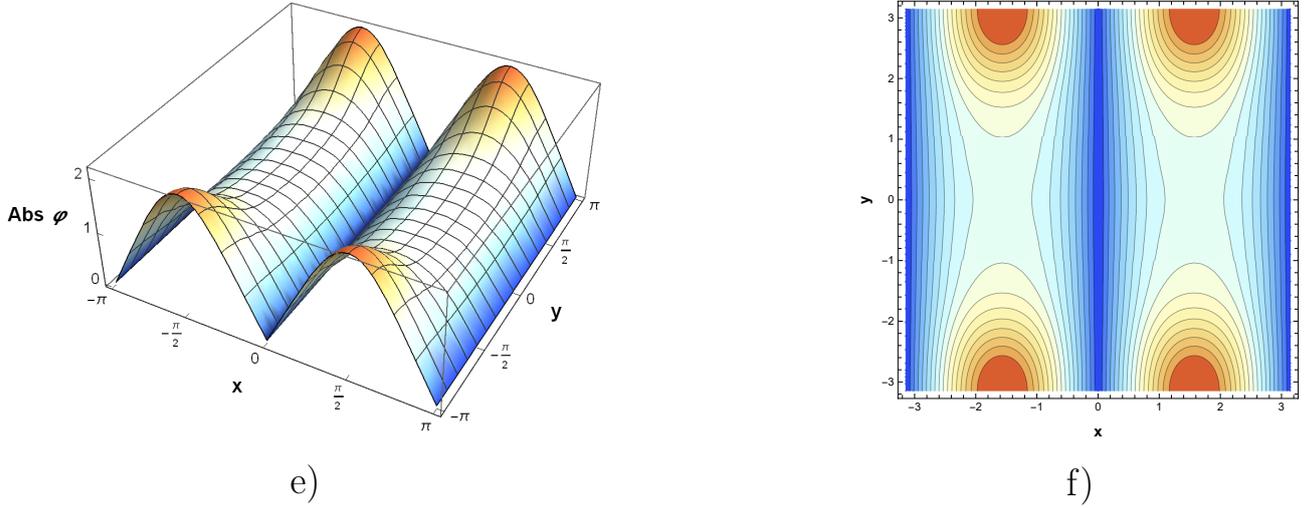


Рис. 4.2: Приближенное решение задачи (4.63) при $\alpha = \pi/12$, $D = 0.3$, $\Lambda = -3/2$: а) действительная часть решения; б) линии уровня действительной части решения; с) мнимая часть решения; д) линии уровня мнимой части решения; е) абсолютная величина решения; ф) линии уровня абсолютной величины решения.

4.3. Частный случай задачи для уравнений с оператором отражения аргументов на квадрате

Рассмотрим задачу на квадрате $S^d = \{(x, y) \mid |x| < \pi/2, |y| < \pi/2\}$ с краевыми условиями Неймана [12]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = N(Qu) = g, \quad (x, y) \in S^d, \quad t > 0, \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\pm\pi/2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\pm\pi/2} = 0, \quad (4.73)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (4.74)$$

где $L = D\Delta - I + \Lambda Q$, $N(Qu) = K(1 + \gamma \cos Qu) - \Lambda Qu = \Omega(Qu)^2 - \frac{\Lambda}{6}(Qu)^3$, $Qu(x, y, t) = u(-x, y, t)$, $Q^2 = I$.

Для оператора $L(D, K)$, действующего в пространстве $H(S^d)$ с областью определения $H^2(S^d)$, имеет место утверждение.

Лемма 4.6. Оператор $L(D, K)$ в пространстве H имеет полную ортогональную систему собственных функций

$$\begin{aligned} z_{2k+1, 2s+1} &= \sin(2k+1)x \cdot \sin(2s+1)y, & z_{2k+1, 2s} &= \sin(2k+1)x \cdot \cos 2sy, \\ z_{2k, 2s+1} &= \cos 2kx \cdot \sin(2s+1)y, & z_{2k, 2s} &= \cos 2kx \cdot \cos 2sy, \end{aligned}$$

$k, s = 0, 1, 2, \dots$ соответствующих собственным значениям

$$\begin{aligned}\lambda_{2k+1,s}^d &= -1 - D \left((2k+1)^2 + s^2 \right) - \Lambda, \\ \lambda_{2k,s}^d &= -1 - D \left((2k)^2 + s^2 \right) + \Lambda.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Согласно теореме 5.1.1 [106] и лемме 4.6, устойчивость нулевого решения определяется знаком собственных значений λ^d (4.75). В данном случае для любого значения параметра D нулевое решение (4.72)-(4.74) неустойчиво при $\Lambda > 1$ и устойчиво при $-1 < \Lambda < 1$. Интерес с точки зрения бифуркационного анализа представляет случай $\Lambda < -1$ (условие 2.1), реализация которого доказана, например, в [77].

Параметр D принимается в качестве бифуркационного. Критические значения параметра D обозначим $D_{2k+1,s} = \frac{-1 - \Lambda}{(2k+1)^2 + s^2}$, $k, s = 0, 1, 2, \dots$. Если $D > D_{1,0}$, то все собственные значения отрицательны, следовательно, нулевое решение задачи (4.72)-(4.74) является устойчивым. Если выполняется неравенство $D_{1,1} < D < D_{1,0}$, то наибольшее собственное значение $\lambda_{1,0}^d > 0$, следовательно, нулевое решение задачи (4.72)-(4.74) является неустойчивым с индексом неустойчивости 1. При дальнейшем уменьшении параметра D происходит увеличение индекса неустойчивости нулевого решения на единицу при $D = D_{2k+1,s}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots$.

Используя метод центральных многообразий, в работе [5] доказана теорема о существовании, устойчивости и асимптотической форме двух стационарных решений рассматриваемой задачи из класса W_1 , которые бифурцируют от меняющего характер устойчивости нулевого решения из класса W_0 .

4.4. Структуры Галеркина на прямоугольнике

Для исследования динамики стационарных структур задачи (4.72)-(4.74) при отходе параметра D от соответствующего бифуркационного значения в данной работе строится иерархия упрощенных моделей уравнения (4.72).

Будем искать приближенные решения уравнения (4.72) в виде

$$\begin{aligned}
u = & \sum_{k=0}^N (z_{2k+1,0} \sin(2k+1)x + z_{0,2k+1} \sin(2k+1)y) + \\
& + \sum_{k=0}^N \sum_{s=0}^N z_{2k+1,2s+1} \sin(2k+1)x \cdot \sin(2s+1)y + \\
& + \sum_{k=0}^N \sum_{s=0}^N z_{4k+2,2s+1} \cos(4k+2)x \cdot \sin(2s+1)y + \\
& + \sum_{k=0}^N \sum_{s=0}^N z_{2k+1,4s+2} \sin(2k+1)x \cdot \cos(4s+2)y.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Подставим (4.76) в уравнение (4.72). Учитывая ортогональность функций (4.3), приходим к системам обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Z} = F(Z, D), \tag{4.77}$$

где $Z = \{z_{p,q}\}$, p, q , принимают значения $0, 2k+1, 4k+2$, $k = \overline{0, N}$, и не могут быть одновременно четными.

Согласно проведенному анализу, системы (4.77) для $N = \overline{1, 5}$ обладают рядом общих свойств. Опишем их. Для $\Lambda < -1$ и любого $N = \overline{1, 5}$ нулевое решение (4.72)-(4.74) экспоненциально устойчиво при $D > D_{1,0}$ (все точки спектра матрицы устойчивости расположены на отрицательной полуоси). При переходе параметра D значения $D_{1,0}$ одна точка спектра переходит на положительную полуось, нулевое решение теряет устойчивость. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две непрерывные по D ветви неподвижных точек $\pm z^{(1)}(D, N) = \pm \{z_{p,q}^{(1)}\}$, координаты которых, кроме $z_{2k+1,0}^{(1)}$, $k = \overline{0, N}$, равны нулю, причем $z_{1,0}^{(1)} > z_{3,0}^{(1)} > \dots > 0$, $k = \overline{0, N}$. Функция

$$\Phi_1(x, y, D, N) = \sum_{k=1}^N z_{2k+1}^{(1)} \sin(2k+1)x \tag{4.78}$$

является асимптотическим представлением стационарного решения начально-краевой задачи (4.72)-(4.74) из класса W_1 , отвечающим ветви неподвижных точек $z^{(1)}(D, N)$.

Функция $\Phi_1(x, y, D, N)$ не зависит от y . Асимптотическая форма и динамика таких решений исследована в [104]. Представляет интерес лишь вопрос об устойчивости $\Phi_1(x, y, D, N)$ под действием мод, зависящих от y . Проведенный для значений $N = \overline{1, 5}$ анализ спектра, показал, что существует $\Lambda^* \approx -2$ такое, что для $\Lambda > \Lambda^*$ и любых $D < D_1$ спектр лежит на отрицательной полуоси. Отметим, что при уменьшении параметра D точки спектра сближаются, причем максимальная точка спектра отделена от нуля. В качестве иллюстрации приведем для $\Lambda = -1.5$, $N = 3$ спектры $z^{(1)}$ при различных значениях параметра D :

$$D = 0.4 : \quad \{-19.70, -13.91, \dots, -3.30, -2.69, -1.79, -0.59, -0.19\},$$

$$D = 0.1 : \quad \{-5.46, -4.88, \dots, -1.42, -1.37, -1.11, -0.81, -0.71\},$$

$$D = 0.01 : \quad \{-1.94, -1.78, \dots, -0.99, -0.92, -0.87, -0.84, -0.83\},$$

$$D = 0.001 : \quad \{-1.58, -1.56, \dots, -0.80, -0.79, -0.78, -0.78, -0.77\}.$$

Точки $z^{(1)}(D, N)$ устойчивы для указанных значений $\Lambda > \Lambda^*$ при любых $D < D_1$. Следовательно, есть основания полагать, что стационарное решение $\Phi_1(x, y, D)$ задачи(4.72)-(4.74) устойчиво при $D < D_1$.

На рисунке 4.3 представлен график приближенного решения (4.77) начально-краевой задачи(4.72)-(4.74) для $D = 0.01$.

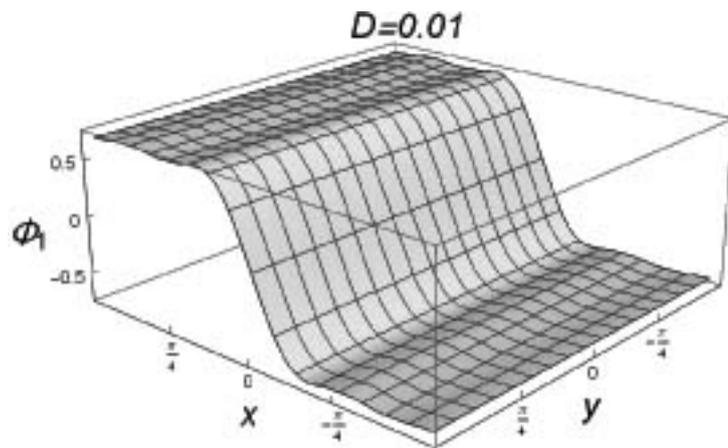


Рис. 4.3: Приближенное стационарное решение (4.77) вида (??) из класса W_1 задачи (4.72)-(4.74) при $\Lambda = -3/2$, $D = 0.01$, $N = 4$.

Для $\Lambda < \Lambda^*$ существует значение параметра $D^* = D^*(N)$ такое, что при $D^* < D < D_{1,0}$ все точки спектра $z^{(1)}(D, N)$ принадлежат отрицатель-

ной полуоси. При $D = D^*$ наибольшая точка спектра $z^{(1)}(D, N)$ переходит на положительную полуось. В результате от теряющей устойчивость ветви $z^{(1)}(D, N)$ ответвляется пара непрерывных по параметру D ветвей стационарных точек $z^{(\pm 1)}(D, N)$. Проведенный анализ спектров ветвей $z^{(\pm 1)}$ показал, что при одинаковых значениях параметра спектры точек $z^{(+1)}(D, N)$ и $z^{(-1)}(D, N)$ совпадают. Для значений параметра $D < D^*$ все точки спектра $z^{(+1)}(D, N)$ находятся в левой полуплоскости.

При уменьшении параметра D и переходе значения $D_{1,1} = (-1 - \Lambda)/2$ индекс неустойчивости нулевого решения увеличивается, еще одна точка спектра тривиального решения переходит на положительную полуось. В результате от нуля ответвляется вторая пара непрерывных по D ветвей стационарных точек $\pm z^{(2)}(D, N)$ таких, что

$$\begin{aligned} z_{2k+1,0}^{(2)} = z_{0,2k+1}^{(2)} = z_{2k+1,4s+2}^{(2)} = z_{4s+2,2k+1}^{(2)} = 0, \quad k, s = \overline{0, N}, \\ z_{2k+1,2s+1}^{(2)} = z_{2s+1,2k+1}^{(2)}, \quad k \neq s, \quad z_{1,1}^{(2)} > z_{1,3}^{(2)} > \dots \end{aligned}$$

Функция

$$\Phi_2(x, y, D, N) = \sum_{k,s=0}^N z_{2k+1,2s+1}^{(2)} \sin(2k+1)x \cdot \sin(2s+1)y \quad (4.79)$$

является приближенным решением задачи (4.72)-(4.74), отвечающим ветви неподвижных точек $z^{(2)}$.

На рисунке 4.4 изображено приближенное решение $\Phi_2(x, y, D, N)$ задачи (4.72)-(4.74), определяемые равенством (4.79).

Анализ спектра ветви неподвижных точек $z^{(2)}(D, N)$ системы (4.77), проведенный для $N = \overline{1, 5}$, приводит к следующим результатам. Спектр устойчивости $z^{(2)}(D, N)$ лежит на вещественной оси. Все точки спектра ветви неподвижных точек $z^{(2)}(D, N)$, кроме максимальной точки $\lambda_0^q(D, N)$, принадлежат левой полуоси. При уменьшении параметра D отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка спектра уменьшается, а минимальная точка увеличивается. В окрестности бифуркационного значения параметра $D_{1,1}$ максимальная точка спектра $\lambda_0^q(D, N)$ ветви неподвижных

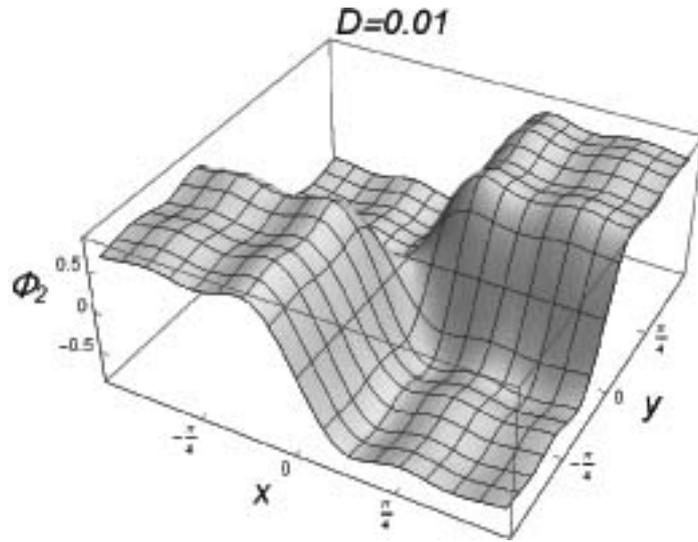


Рис. 4.4: Приближенное решение (4.79), $N = 5$, $\Lambda = -3/2$, $D = 0.01$.

точек $z^{(2)}(D, N)$ положительна. Для $-2 < \Lambda < -1$ при отходе от бифуркационного значения максимальная точка спектра $\lambda_0^q(D, N)$ медленно приближается к нулю и переходит через нуль на левую полуось.

При уменьшении параметра D и переходе значения $D_{1,2} = (-1 - \Lambda)/5$ индекс неустойчивости нулевого решения увеличивается до трех. В результате от нуля ответвляется третья пара непрерывных по D ветвей стационарных точек $\pm z^{(3)}(D, N) = \pm \{z_{l,m}^{(3)}\}$; $l, m = 0, 1, 2, \dots$, у которых все координаты, кроме $z_{2k+1, 4s+2}^{(3)}$, $k, s = 0, 1, 2, \dots$, равны нулю. Функция

$$\Phi_3(x, y, D, N) = \sum_{k,s=0}^N z_{2k+1, 4s+1}^{(3)} \sin(2k+1)x \cdot \cos(4s+2)y \quad (4.80)$$

является приближенным решением задачи (4.72)-(4.74), отвечающим ветви неподвижных точек $z^{(3)}$.

На рисунке 4.5 приведено приближенное решение $\Phi_3(x, y, D, N)$ задачи (4.72)-(4.74), определяемое равенством (4.80).

Приведем полученные нами результаты по динамике спектра неподвижных точек $z^{(3)}(D, N)$, $N = \overline{1, 5}$ системы (4.77). Спектр $z^{(3)}(D, N)$ лежит на вещественной оси. Все точки спектра ветви неподвижных точек $z^{(3)}(D, N)$, кроме двух максимальных точек $\lambda_1^q(D, N)$, $\lambda_2^q(D, N)$, принадлежат левой полуоси. При уменьшении параметра D отрицательные точки спектра сближа-

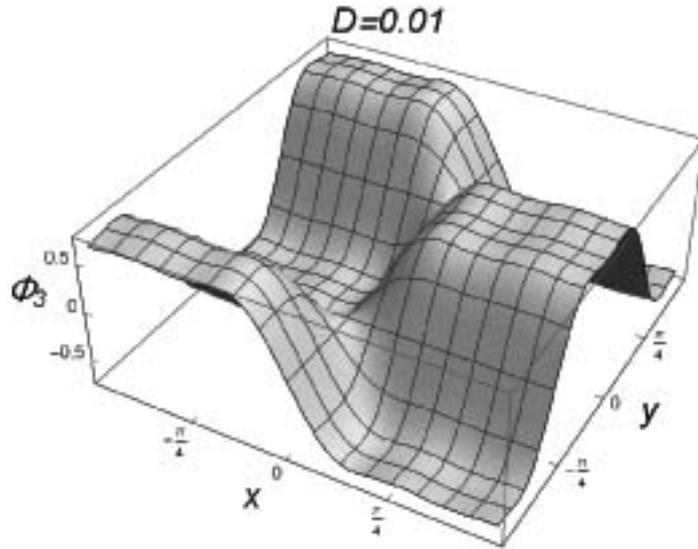


Рис. 4.5: Приближенное решение (4.80) при $N = 5$, $\Lambda = -3/2$, $D = 0.01$.

ются: максимальная точка уменьшается, а минимальная точка увеличивается. В окрестности бифуркационного значения параметра $D_{1,2}$ максимальные точки спектра $\lambda_1^q(D, N)$, $\lambda_2^q(D, N)$ ветви неподвижных точек $z^{(3)}(D, N)$ положительны. При уменьшении параметра D и отходе от $D_{1,2}$ для $-2 < \Lambda < -1$ поведение $\lambda_1^q(D, N)$, $\lambda_2^q(D, N)$ зависит от N : при $N \neq 3$ точки $\lambda_1^q(D, N)$, $\lambda_2^q(D, N)$ медленно приближаются к нулю, но не переходят через нуль; при $N = 3$ точки $\lambda_1^q(D, N)$, $\lambda_2^q(D, N)$ медленно приближаются к нулю, сначала одна точка переходит с ненулевой скоростью через нуль на левую полуось, а потом и вторая точка переходит на левую полуось. Например,

$$\begin{aligned}
 N = 3 \quad D = 0.075 & : \{-6.90, -5.71, \dots, -0.36, -0.235, 0.18, 0.13\}, \\
 D = 0.05 & : \{-5.18, -4.42, \dots, -0.37, -0.30, -0.05, 0.03\}, \\
 D = 0.01 & : \{-2.61, -2.33, \dots, -0.49, -0.31, -0.14, -0.10\}, \\
 D = 0.001 & : \{-2.21, -1.91, \dots, -0.54, -0.23, -0.17, -0.08\}, \\
 D = 0.0001 & : \{-1.81, -1.73 \dots, -0.38, -0.32, -0.28, -0.19\}.
 \end{aligned}$$

Для $\Lambda < -2$ при уменьшении параметра D ветвь неподвижных точек $z^{(3)}(D, N)$ увеличивает индекс неустойчивости: еще две точки спектра одна за другой переходят через нуль на правую полуось.

Таким образом, результаты непосредственного приближенного решения задачи(4.72)-(4.74) согласуются с результатами галеркинской аппроксимации

исходной задачи.

Выводы к главе 4

Используя преобразования Лапласа и Фурье получено интегральное представление решения задачи с преобразованием инволюции на бесконечной полосе с краевыми условиями с косо́й производной. Показано существование и получена асимптотическая форма решения задачи с преобразованием инволюции с краевыми условиями с косо́й производной и условием периодичности. Полученное представление дает возможность построения итерационного процесса нахождения решения исходной задачи.

Для случая прямоугольника с условиями с косо́й производной на вертикальных и на горизонтальных границах и с косо́й производной на горизонтальных границах и условием периодичности решены соответствующие спектральные задачи: найдены собственные функции и собственные значения. Для условий второго типа доказана теорема о существовании и асимптотической форме решений из класса W_1 .

Частным случаем рассматриваемой задачи на прямоугольнике краевыми условиями с косо́й производной и условием периодичности является задача рассмотренная на прямоугольнике с условиями Неймана на границе и условием периодичности. Результаты полностью согласуются.

Используя математический пакет Wolfram Mathematica проведены численные эксперименты и получены визуализации найденных структур.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа содержит результаты исследования соискателя, направленные на решение проблем существования и устойчивости новых структур начально-краевой задачи параболического ФДУ с операторами поворота, отражения и радиального сжатия пространственной переменной на кольце, круге, окружности, с оператором отражения и косой производной на бесконечной полосе и прямоугольнике, основанные на методах центрального многообразия и согласованного с ним метода Галеркина. Для получения эффектов, реализованных экспериментально в оптических системах с обратной связью, были рассмотрены три характерные задачи. А именно, начально-краевая задача параболического типа с оператором поворота и радиального сжатия на кольце, начально-краевая задача параболического типа с оператором поворота на круге и окружности, а также начально-краевая задача параболического типа с оператором отражения на прямоугольнике. Каждая из указанных задач может быть рассмотрена для любой из областей.

Основные результаты работы:

1. На кольце, круге и окружности для начально-краевой задачи параболического типа с условиями Неймана на границе и условиями 2π -периодичности с преобразованиями поворота и радиального сжатия пространственных переменных на основе метода центральных многообразий доказаны теоремы о существовании в окрестности однородного в пространстве решения неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений. Получены их аналитические представления.
2. На основе метода Галеркина, согласованного с методом центральных многообразий, определены форма и характер устойчивости бифурцирующих решений при уменьшении значений бифуркационного параметра. Проведен спектральный анализ соответствующих неоднородных в пространстве стационарных решений и периодических по времени решений

при изменении бифуркационного параметра.

3. Получены условия возникновения медленно меняющихся (метаустойчивых) структур в результате седло-узловых бифуркаций в начально-краевой задаче параболического типа с условиями Неймана на границе и условиями 2π -периодичности с преобразованиями поворота на окружности. Описана динамика метаустойчивых структур (медленно меняющихся решений) с течением времени.
4. Получено представление начально-краевой задачи с оператором инволюции с краевыми условиями с косо́й производной для полосы в виде нелинейного интегрального уравнения. Предложена формула для организации итерационного процесса нахождения решения.
5. Для начально-краевой задачи параболического типа с условиями с косо́й производной на прямоугольнике получены собственные функции и собственные значения соответствующей линеаризованной задачи для краевых условий двух типов: с косо́й производной по переменным x , y и с условием периодичности по x и с косо́й производной по y . Получена трехмодовая аппроксимация неоднородного в пространстве стационарного решения начально-краевой задачи на прямоугольнике с условием периодичности по x и с косо́й производной по y .

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

- [1] Ахманов, С. А. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей / С. А. Ахманов, М. А. Воронцов, В. Ю. Иванов // в кн. Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука. — 1990. — С. 263–325.
- [2] Ахромеева, Т. С. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1992. — с.
- [3] Бабин, А. В. Аттракторы эволюционных уравнений / А. В. Бабин, М. И. Вишик. — М.: Наука, 1989. — 294 с.
- [4] Белан, Е. П. Вращающиеся волны в параболической задаче с преобразованным аргументом / Е. П. Белан // Динамические системы. — 2000. — Вып. 16. — С. 160–167.
- [5] Белан, Е. П. Бифуркация периодических решений в параболической задаче с преобразованным аргументом / Е. П. Белан // Ученые записки ТНУ, сер. матем., мех., информатика и кибернетика. — 2001. — Т. 14, № 1. — С. 24–33.
- [6] Белан, Е. П. О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан // Ученые записки ТНУ, сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. — 2002. — Т. 2. — С. 11–23.
- [7] Белан, Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 5. — С. 645–654.
- [8] Белан, Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной / Е. П. Белан //

Журнал математической физики, анализа, геометрии. — 2005. — Т. 1, № 1. — С. 3–34.

- [9] Белан, Е. П. Метод инвариантных многообразий в теории параболических и функционально-дифференциальных уравнений и его применения: диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук / Е. П. Белан // Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского. — 2007. — 293 с.
- [10] Белан, Е. П. Оптическая буферность стационарных структур / Е. П. Белан // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — Т. 44, № 5. — С. 61–75.
- [11] Белан, Е. П. Стационарные структуры в параболическом уравнении с преобразованием отражения пространственной переменной / Е. П. Белан // Динамические системы. — 2010. — № 28. — С. 33–45.
- [12] Белан, Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной / Е. П. Белан // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 95–111.
- [13] Белан, Е. П. Двумерные стационарные структуры в параболическом уравнении с отражением пространственных переменных / Е. П. Белан // Кибернетика и системный анализ. — 2011.— Т. 47, № 3. — С. 33–41.
- [14] Белан, Е. П. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 10. — С. 1348–1357.
- [15] Белан, Е. П. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9, № 2.— С. 155–169.

- [16] Белан, Е. П. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Динамические системы. — 2008. — Вып. 25. — С. 3–16.
- [17] Белан, Е. П. Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной / Е. П. Белан, О. Б. Лыкова // Динамические системы. — 2009. — Т. 27. — С. 3–16.
- [18] Белан, Е. П. Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения / Е. П. Белан, А. М. Самойленко // Украинский математический журнал. — 2013. — Т. 65, № 1. — С. 21–43.
- [19] Белан, Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной / Е. П. Белан, Ю. А. Хазова // Динамические системы. — 2014. — Т. 4, № 1–2(32). — С. 43–57.
- [20] Белан, Е. П. Автоколебательные режимы горения вдоль полосы / Е. П. Белан, О. В. Шиян // Динамические системы. — 2009. — Вып. 27. — С. 3–16.
- [21] Белан, Е. П. Устойчивые режимы горения вдоль полосы / Е. П. Белан, О. В. Шиян. // Ученые записки ТНУ, сер. Физ.-мат. науки. — 2010. — Т. 1 (62), № 1. — С. 1–16.
- [22] Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М.: Мир, — 1967. — 548 с.
- [23] Бибииков, Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации / Ю. Н. Бибииков. — Ленинград.: Издательство ЛГУ, 1991. — 144 с.
- [24] Боголюбов, Н. Н. О некоторых статических методах математической физики / Н. Н. Боголюбов. — Львов: Изд-во АН УССР, 1945. — 150 с.

- [25] Боголюбов, А. Н. Задачи по математической физике / А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов // Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 350 с.
- [26] Боголюбов, А. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский — М.: Наука, 1974. — 503 с.
- [27] Варфоломеев, Е. М. О бифуркации Андронова-Хопфа для квазилинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованиями пространственных переменных / Е. М. Варфоломеев // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, вып. 2. — С. 173–174.
- [28] Варфоломеев, Е. М. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике / Е. М. Варфоломеев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т. 21. — С. 5–36.
- [29] Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов // — М.: Высш. шк., 1990, — 207 с.
- [30] Васильева, А. Б. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / А. Б. Васильева, С. А. Кащенко, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов // Мат. сборник. — 1989. — Т. 130 (172), № 4 (8). — С. 488–499.
- [31] Воронцов, М. А. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью / М. А. Воронцов, Н. И. Железных // Мат. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 2. — С. 31–38.
- [32] Воронцов, М. А. Коррекция фазовых искажений в нелинейном интерферометре с оптической обратной связью / М. А. Воронцов, М. Э. Киракосян, А. В. Ларичев // Квантовая электроника. — 1991. — Т. 18.— С. 117–120.

- [33] Воронцов, М. А. Управляемые оптические системы / М. А. Воронцов, А. В. Корябин, В. И. Шмальгаузен. — М.: Наука, 1988. — 272 с.
- [34] Гукенхеймер, Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. — 561 с.
- [35] Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с.
- [36] Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования : с прил. табл., сост. Р. Гершелем / пер. с 3-го немецкого изд. Г. А. Вольперта ; с предисловием Я. З. Цыпкина. / Г. Деч. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
- [37] Иванов, В. Ю. Фазовые структуры в нелинейном кольцевом резонаторе / В. Ю. Иванов, И. Б. Иванова (Полякова) // ВМУ. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. — 2016, № 3.
- [38] Иванов, В. Ю. Поперечные взаимодействия в пассивном кольцевом резонаторе / В. Ю. Иванов, Н. Г. Ирошников, С. Л. Лачинова // Изв. РАН. Сер. физ. — 1996. — Т. 60, № 12. — С. 169-176.
- [39] Карапетянц, Н. К. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения / Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко // — Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1988. — 187 с.
- [40] Кащенко, С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах / С. А. Кащенко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1991. — Т. 31, № 3. — С. 467–473.
- [41] Колесов, А. Ю. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. — 2004. — Вып. 140, № 1. — С. 14–28.

- [42] Колесов, А. Ю. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией / А. Ю. Колесов // Укр. мат. журнал. — 1987. — Т. 39, №. 1. — С. 27–34.
- [43] Колесов, А. Ю. Явление буферности в теории горения / А. Ю. Колесов // ДАН. — 2004. — Т. 396, №. 2. — С. 170–173.
- [44] Копаев, А. В. Решение задач о наклонной производной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в полуплоскости / А. В. Копаев // Математика и математическое моделирование. — 2018. — Т. 6. — С. 1–10.
- [45] Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении с поворотом пространственной переменной / А. А. Корнута // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 1–2. — С. 59–75.
- [46] Корнута, А. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче с преобразованием отражения / А. А. Корнута // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — Т. 3(28). — С. 49–62.
- [47] Корнута, А. А. Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности / А. А. Корнута // Динамические системы, — 2016, — Т. 6(34), № 4. — С. 311–322.
- [48] Корнута, А. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Динамические системы. — 2019. — Т. 9(37), № 4. — С. 390–409.
- [49] Корнута, А. А. Динамика решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Известия вузов. ПНД. — 2022. — Т. 30, № 2. — С. 132–151.

- [50] Корнута, А. А. Задача нелинейной оптики с преобразованием пространственной переменной и кривой производной / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 276-288.
- [51] Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче на окружности с преобразованием пространственной переменной / А. А. Корнута // *Метод функций Ляпунова «MFL-2014»*, 15–20 сентября 2014, Алушта, Россия. — С. 30–31.
- [52] Корнута А. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче на окружности с преобразованием пространственной переменной / А. А. Корнута // *XXV Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2014»*, 21–30 сентября 2014, Судак, Россия. — С. 47.
- [53] Корнута, А. А. Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием пространственной переменной / А. А. Корнута // *XXVI Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2015»*, 17–29 сентября 2015, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 52–53.
- [54] Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче на окружности с преобразованием пространственной переменной / А. А. Корнута // *Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VI*, 24–29 апреля 2016, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 103-104.
- [55] Корнута А. А. Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота пространственной переменной на окружности / А. А. Корнута // *XXVII Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2016»*, 16–29 сентября 2016, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 46–47.
- [56] Корнута, А. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности / А. А. Корнута // *Математика, информатика, ком-*

пьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2017 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике, 2017, Симферополь, Россия. — С. 72–73.

- [57] Корнута, А. А. Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности / А. А. Корнута // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – VII, 23–28 апреля 2017, Ростов-на-Дону, Россия. — С. 92–93.
- [58] Корнута А. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче на окружности / А. А. Корнута // Международная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST-2018), 17–21 сентября 2018, Алушта, Россия. — С. 36-37.
- [59] Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболической задаче с преобразованием пространственной переменной / А. А. Корнута // XXIX Крымская осенняя математическая школа «КРОМШ-2018», 17–29 сентября 2018, Батилиман (Ласпи), Россия. — С. 18-19.
- [60] Корнута, А. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче с преобразованием отражения / А. А. Корнута // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2019 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике 2019. Симферополь, Россия. — С. 30–34.
- [61] Корнута, А. А. О стационарных структурах параболического уравнения с преобразованием пространственного переменного / А. А. Корнута // Всероссийская научно-практическая конференция с международным

участием «Уравнения типа свертки в науке и технологиях» (ECTST-2019), посвященная 90-летию со дня рождения Ю.И. Черского, 25–28 сентября 2019, Мисхор, Россия. С. 33–35.

- [62] Корнута, А. А. Стационарные структуры параболического уравнения с преобразованием пространственного аргумента на окружности / А. А. Корнута // Международная конференция XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум «КРОМШ-2019», 17–29 сентября 2019, Батилиман (Ласпи), Россия. С. 178–179.
- [63] Корнута, А. А. Нелинейные уравнения параболического типа с инволюцией в классе периодических функций / А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко // Международная конференция XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум «КРОМШ-2019», 19–27 сентября 2020, Батилиман (Ласпи), Россия. С. 156–159.
- [64] Корнута, А. А. Анализ структур нелинейного уравнения параболического типа с преобразованием пространственных переменных / А. А. Корнута // Международная конференция XXXIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам «КРОМШ-2022», 16–25 сентября 2022, Алушта, Россия. С. 26.
- [65] Корнута, А. А. Задача с косо́й производной на границе для нелинейного уравнения параболического типа с отражением пространственной переменной / А. А. Корнута // Международная конференция XXXIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам «КРОМШ-2023», 8–17 сентября 2023, Кача (Севастополь), С. 57–59.
- [66] Куликов, Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке / Д. А. Куликов, А. Н. Куликов / Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52, № 5. — С. 930–945.

- [67] Куликов, Д. А. Механизм формирования волновых диссипативных структур в одной из задач нанотехнологий / Д. А. Куликов // Вестник рос. академ. естественных наук. — 2013. — Т. 4.— С. 23–31.
- [68] Куликов А.Н. Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры. /Д. А. Куликов, А. Н. Куликов // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28, № 3. — С. 33–50.
- [69] Каменский, Г. А. Л. О минимуме квадратичного функционала и о линейных краевых задачах эллиптического типа с отклоняющимися аргументами / Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис, А. Л. Скубачевский // УМН. — 1979. — Т. 34, № 3(207). — С. 197–198.
- [70] Келли, А. Стабильные, центрально-стабильные, центральные, центрально-неустойчивые и нестабильные многообразия / А. Келли // Дифференциальные уравнения. — 1967. — Т. 3 (4). — С. 546–570.
- [71] Лыкова, О. Б. О существовании и поведении интегральных многообразий для систем нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.00.00. — Киев, 1957. — 147 с.
- [72] Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Гостехиздат, 1950. — 472 с.
- [73] Мазуров, М. Е. Торнадо – его физические механизмы и свойства / М. Е. Мазуров // Изв. РАН. Серия физическая. —2019. — Т. 83, № 1, — С. 111–117.
- [74] Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. — М.: Мир, 1980. — 368 с.
- [75] Митропольский, Ю. А. Проблемы асимптотического теории нестационарных колебаний / Ю. А. Митропольский. — М.: Наука, 1964. — 431 с.

- [76] Митропольский, Ю. А. Интегральные многообразия в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова — М.: Наука, 1973. — 431 с.
- [77] Мищенко, Е. Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.
- [78] Моисеев, Т. Е. Разрешимость краевых задач с кривой производной / Т. Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 7. С. 995–997.
- [79] Муравник, А. Б. О задаче Коши для некоторых неоднородных дифференциально-разностных параболических уравнений / А. Б. Муравник // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, № 4. — С. 538–548.
- [80] Муравник, А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А. Б. Муравник // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. Т. 52. — С. 3–141.
- [81] Плисс, В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения / В. А. Плисс // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1964. — Т. 28 (6). — С. 1297–1324.
- [82] Пуанкаре, А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / Пер. с франц. Е. Леонтович, А. Майер под ред. А. А. Андропова. — М.: ГИТТЛ, 1947. — 392 с.
- [83] Разгулин, А. Б. Бифуркационные автоколебания в нелинейном параболическом уравнении с пространственным преобразованием аргументов / А. В. Разгулин // Моделирование и исследование устойчивости процессов. — Киев: Знание, 1992. — Часть 2. — С. 29–30.
- [84] Разгулин, А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической зада-

че с преобразованным аргументом / А. В. Разгулин // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. — 1993. — Т. 33, № 1. — С. 69–80.

- [85] Разгулин, А. В. Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью / А. В. Разгулин // Математ. моделирование. — 1993. — Т. 5, № 4. — С. 105–119.
- [86] Разгулин, А. В. Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом / А. В. Разгулин // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. — 1993. — Т. 33, № 10. — С. 1499–1510.
- [87] Разгулин, А. В. Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики. — М.: МАКС Пресс, 2006. — 152 с.
- [88] Разгулин, А. В. Математическое моделирование нелинейных оптических систем с управляемым преобразованием аргументов / А. В. Разгулин — дисс. докт. физ.-мат. наук 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. — М.: 2006. — 330 с.
- [89] Разгулин, А. В. Нелинейные модели оптической синергетики / А. В. Разгулин — М: МАКС Пресс, 2008. — 203 с.
- [90] Разгулин, А. В. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием / А. В. Разгулин, Т. Е. Романенко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 11. — С. 42–60.
- [91] Романенко, Т. Е. Двумерные вращающиеся волны в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с поворотом пространственных аргументов и запаздыванием / Т. Е. Романенко // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50,- № 2. — С. 260–263.

- [92] Россровский, Л. Е. Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений / Л. Е. Россровский, А. Л. Скубачевский // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 1999. — № 66. — С. 114–192.
- [93] Россровский, Л. Е. О задаче Дирихле для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с аффинным преобразованием аргумента / Л. Е. Россровский, А. А. Товсултанов // Доклады академии наук — 2019. — Т. 48, № 4. — С. 347–350.
- [94] Рудый, А. С. Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении ионной бомбардировкой / А. С. Рудый, А. В. Метлицкая, А. Н. Куликов // Микроэлектроника. — 2011. — Т. 40, № 2. — С. 109–118.
- [95] Рюэль, Д. О природе турбулентности / Д. Рюэль, Ф. Такенс // Странные аттракторы: сб. ст. / Я. Г. Синай, Л. П. Шильников. — М.: Мир, 1981. — С. 117–151.
- [96] Самойленко, А. М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем / А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 2. — С. 267–278.
- [97] Скубачевский, А. Л. О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения / А. Л. Скубачевский // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1394–1401.
- [98] Скубачевский, А. Л. Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения / А. Л. Скубачевский, А. М. Селицкий // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 1. — С. 207–208.
- [99] Скубачевский, А. Л. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений /

- А. Л. Скубачевский // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 1 (307). — С. 169–170.
- [100] Скубачевский, А. Л. О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов / А. Л. Скубачевский // Функц. анализ и его прилож. — 1997. — Т. 31, № 4. — С. 60–65.
- [101] Скубачевский, А. Л. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения / А. Л. Скубачевский, Р. В. Шамин // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 1. — С. 145–153.
- [102] Стрыгин, В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий / В. В. Стрыгин, В. А. Соболев. — М.: Наука, 1988, — 256 с.
- [103] Ха, Д. Т. Мультистабильность для математической модели динамики хищников и жертв на неоднородном ареале / Д. Т. Ха, В. Г. Цибулин // СМФН — 2022. — Т. 68, № 3 — С. 509-521.
- [104] Хазова, Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной / Е. П. Белан, Ю. А. Хазова // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 (32), № 1–2. — С. 43–57.
- [105] Накен, Г. Синергетика.— М.: Мир, 1980. — 404 с.
- [106] Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
- [107] Хейл, Дж. Теория функционально дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 422 с.
- [108] Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. — М.: Мир, 1985. — 280 с.

- [109] Цибулин, В. Г. Нелинейная динамика системы хищник - жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов / В. Г. Цибулин, Д. Т. Ха, П. А. Зеленчук // Известия вузов. ПНД — 2021. — Т. 29, вып. 5. — С. 751-764.
- [110] Чушкин, В. А. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом / В. А. Чушкин, А. В. Разгулин // Вестн. Моск. ун-та.- — 2003.— Т. 15, № 2. — С. 13–20.
- [111] Хазова, Ю. А. Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи / Ю. А. Хазова, В. А. Лукьяненко // Известия вузов. ПНД. — 2019. — Т. 27, № 4. — С. 85–98.
- [112] Akhmanov S. A. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics generations of spatiotemporal structures / S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, et all. // J. Optical Soc. Amer. Ser. B. — 1992. — Vol. 9.— № 1. — P. 78–90.
- [113] Adachihara, H. & Faid, H. 1993 Two-dimensional nonlinear-interferometer pattern analysis and decay of spirals / H. Adachihara, Y. /; Faid // JOSA B. — 1993. — Vol. 10, № 7. — P. 1242–1253.
- [114] Budzinskiy, S. S. Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under $O(2)$ hopf bifurcation / S. S. Budzinskiy, A. V. Razgulin // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2017. — Vol. 49. — P. 17–29.
- [115] Budzinskiy, S. S. Pulsating and Rotating Spirals in a Delayed Feedback Diffractive Nonlinear Optical System / S. S. Budzinskiy, A. V. Razgulin // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2021. — 31, №1. — 2130002 (19 pages).
- [116] Carr, J. Metastable Patterns in Solution of $u_t = \mu^2 u_{xx} - f(u)$ / J. Carr,

- R.L. Pego // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1989. — Vol. XLII. — P. 523–576.
- [117] Chesnokov, S. S., Rybak A. A. Spatiotemporal chaotic behavior of time-delayed nonlinear optical systems/ S. S. Chesnokov, A. A. Rybak // Laser Physics. — 2000. — Vol. 10, no. 5. — P. 1061–1068.
- [118] Dellnitz, M. et al. 1995 Spirals in scalar reaction–diffusion equations / M. Dellnitz et al. // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1995. — Vol. 5, № 6. p. 1487–1501.
- [119] Du, B. Partial differential equation modeling with Dirichlet boundary conditions on social networks / B. Du, X. Lian, X. Cheng // Bound Value Probl. — 2018.
- [120] Iroshnikov, N. G., Vorontsov M. A. Transverse rotating waves in the nonlinear optical system with spatial and temporal delay // In «Frontiers in nonlinear optics: in memoriam of Serge Akhmanov» (Ed. by H. Walter, N. Koroteev). London: M. Scully. — 1992. P. 261–278.
- [121] Fusco G. Slow-Motion Manifolds, Dormant Instability, and Singular Perturbations / G. Fusco, J.K. Hale // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 1989. — Vol. 1. — № 1. — P. 75–94.
- [122] Grigorieva, E. V. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback/ E. V. Grigorieva, H. Haken, S. A. Kashchenko, A. Pelster // Physika D. — 1999. — Vol. 125. — P. 123–141.
- [123] Ikeda, K. Multiple-Valued Stationary State and Its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System / K. Ikeda // Opt. Commun. — 1979. — T. 30. — 257 p.
- [124] Karapetiants, N., Samko, S. Equations with Involution Operators. — Boston: Birkhäuser. — 2001.

- [125] Kornuta A. A. Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables / A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko // Lobachevskii J. Math 42 (5), 911–930 (2021).
- [126] Kornuta A. A. Stability of Structures and Asymptotics of Nonlinear Parabolic Type Equations Solutions with Transformation of Arguments / A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko // Lobachevskii J. Math 42 (14), 3468–3485 (2021).
- [127] Kornuta, A. A. Scenarios of the behavior of solutions of a nonlinear functional-differential equation of parabolic type with transformation of arguments / A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko // Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis X OTHA-2021, 22–27 august, 2021, Rostov-na-Donu, Russia.
- [128] Kornuta, A. A. A problem with an oblique derivative for a nonlinear equation of parabolic type with involution / A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko // Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis X OTHA-2023, 20–25 august, 2023, Rostov-na-Donu, Russia.
- [129] Kovaleva A.M., Kulikov D.A. Bifurcations of spatially inhomogeneous solutions in two versions of the nonlocal erosion equation. // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — 248, №4. — P. 438–447.
- [130] Kulikov A.N., Kulikov D.A. Bifurcations in a boundary-value problem of nanoelectronics. // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — 208, №2. — P. 211–221.
- [131] Kuznetsov, Y. A. Elements of applied bifurcation theory. — New York. Springer, Verlag, 1998. — 591 p.
- [132] Raugel, G. Dynamics of partial differential equations on thin domains / G. Raugel // Dynamical Systems / ed. by R. Johnson. — Springer Berlin

- Heidelberg, 1995. — P. 208–315. — (Lecture Notes in Mathematics ; 1609).
— DOI: 10.1007/BFb0095241.
- [133] Razgulin, A. V. Finite-dimensional dynamics of distributed optical systems with delayed feedback / A. V. Razgulin // Computers and Mathematics with Applications. — 2000. — Vol. 40, no. 12. P. 1405–1418.
- [134] Razgulin, A. V. Rotational multi-petel waves in optical system with 2-D feedback / A. V. Razgulin // Chaos in Optics. Ed. Rajarshi (Roy proc. SPIE-2039). — 1993. — P. 342–351.
- [135] Skubachevskii, A. L. Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics / A. L. Skubachevskii // Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. — 1998. — Vol. 12, № 2. — P. 261–278.
- [136] Temam, R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. — New-York, North-Holland, 1977. — p.
- [137] Vorontsov, M. A. Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions / M. A. Vorontsov, A. V. Razgulin // Photonics and Optoelectronics. — 1993. — Vol. 1, no. 2. P. 103–111.
- [138] Vorontsov, M. A. Rotatory instability of light fields transverse structure in nonlinear systems with optical feedback / M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev // Izvestiya akademii nauk sssr seriya fizicheskaya. — 1991. — Vol. 55, no. 2 — P. 316–321.
- [139] Vorontsov, M. A. Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems / M. A. Vorontsov, N. I. Zheleznykh , V. Yu. Ivanov // Opt. and Quant. Electron. — 1988. — Vol. 22, no. 6. — P. 501–515.
- [140] Wiggins, S. Chaotic Transport in Dynamical Systems / S. Wiggins. — Springer-Verlag: New York, 1992. — 301 p.

- [141] Zheleznykh, N. I. 1994 Rotating spiral waves in a nonlinear optical system with spatial interactions / N. I. Zheleznykh [et al.]// Chaos, Solitons & Fractals. — 1994. — Vol. 4, № 8. — P. 1717–1728.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$H = L^p(\Omega, X)$ — пространство всех функций из пространства с мерой Ω в банахово пространство X , интегрируемых в степени p ($1 \leq p < +\infty$), с нормой, определяемой равенством

$$\|f\|_{L^p(\Omega, X)} = \left\{ \int_{\Omega} \|f(t)\|_X^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$W^{k,p}(\Omega, X)$ — пространство Соболева функций $f \in L^p(\Omega, X)$, которые имеют интегрируемые в степени p обобщенные производные до k -го порядка включительно (здесь Ω — открытое множество в \mathbb{R}^n), с нормой

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega, X)} = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{j=0}^k |f^{(j)}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$H = L_2^r(r_1, r_2) \times (0, 2\pi)$ — пространство функций из L_2 , квадраты которых интегрируемы с весом r , со скалярным произведением и нормой, определяемыми соответственно следующими равенствами

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) \overline{v(r, \theta)} r dr d\theta, \quad \|u\|_H^2 = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} |u(r, \theta)|^2 r dr d\theta.$$

H^2 — пространство Соболева комплекснозначных функций двух вещественных переменных со скалярным произведением и нормой соответственно

$$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_H + \langle -\Delta u, -\Delta v \rangle_H, \quad \|u\|_{H^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle_H}.$$

$H_{2\pi}^2 = \{u | u(\theta + 2\pi) = u(\theta)\}$ — замкнутое пространство 2π -периодических функций из H^2 .

Q — оператор преобразования пространственных переменных.

Q_h — оператор поворота пространственной переменной на угол h .

I — оператор тождественного преобразования.

D — коэффициент диффузии нелинейной среды.

Δ — оператор Лапласа.

- γ ($0 < \gamma \leq 1$) — коэффициент контрастности интерференционной картины.
- $K > 0$ — коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного поля.
- W_0 — класс стационарных пространственно-однородных решений, рассматриваемой задачи;
- W_1 — класс стационарных пространственно-неоднородных решений, рассматриваемой задачи;
- i — мнимая единица;
- функционально-дифференциальное уравнение.

Список иллюстраций

1.1	Бифуркационная диаграмма решений уравнения (1.6).	26
1.2	Решения $u = w(t)$ при фиксированном значении $\gamma = 0,5$ и различных значениях параметра K	27
1.3	(а) Решения (1.13) при $K = 1, 2, 3, 4, 5$; (б) фазовый портрет системы (1.13) при $\gamma = 0,5, K = 10$	28
1.4	Решения $u = w(r)$ при фиксированном значении $\gamma = 0,5$ и различных значениях параметра K	29
2.1	Приближенное решение (2.16) для $\Lambda = -3/2, h = \pi/3$: а) при $D = 0, 1$; б) при $D = 0, 01$	39
2.2	Приближенное решение (2.16) для $\Lambda = -3/2, h = \pi/3$: а) при $D = 0, 1$; б) при $D = 0, 01$	43
2.3	Приближенное решение (2.21) типа "бегущая волна" полученное с применением метода Галеркина, для $\Lambda = -3/2, D = 0, 02$: а) при $t = 1$; б) при $t = 5$	50
3.1	Приближенное решение (3.5) для $\Lambda = -3/2, h = \pi/3$ при $D = 0, 1; 0, 01$	55
3.2	Приближенное решение (3.17) для $\Lambda = -3/2, h = 2\pi/3, D = 0, 02$ при а) $t = 1$; б) $t = 5$	60
3.3	Функция $\varphi_1(\theta, D)$ при $\Lambda = -3/2, D = 0.49; 0.4; 0.2; 0.1; 0.01$	67
3.4	Приближенное решение системы (3.36) вида (3.38) для $\Lambda = -3, h = \pi/3$ при $D = 0.58394; 0.5; 0.1; 0.01$	69
3.5	Приближенные решения (ф3.39704.36ф) при $N = 33, \Lambda = -3/2, D = 0.05; 0.04; 0.02; 0, 005$	70
3.6	Приближенные решения (3.24) типа i), порождённые бифуркациями седло-узел при $\Lambda = -3/2, N = 31, D = 0.0017$	74
3.7	Приближенные решения (3.24) типа ii), порождённые бифуркациями седло-узел при $\Lambda = -3/2, N = 31, D = 0.0017$	75
3.8	Решение (3.24), $\Lambda = -3/2, D = 0.0017$	76
3.9	Решение (3.24) при $t = 4000000, 4900000, 4950000, 4959600, 4959737, 4959800, D = 0.0017, \Lambda = -3/2$	76

- 4.1 Приближенное решение задачи (4.63) при $\alpha = \pi/4$, $D = 0.3$, $\Lambda = -3/2$:
 а) действительная часть решения; б) линии уровня действительной части решения; в) мнимая часть решения; г) линии уровня мнимой части решения; д) абсолютная величина решения; е) линии уровня абсолютной величины решения. 106
- 4.2 Приближенное решение задачи (4.63) при $\alpha = \pi/12$, $D = 0.3$, $\Lambda = -3/2$:
 а) действительная часть решения; б) линии уровня действительной части решения; в) мнимая часть решения; г) линии уровня мнимой части решения; д) абсолютная величина решения; е) линии уровня абсолютной величины решения. 107
- 4.3 Приближенное стационарное решение (4.77) вида (??) из класса W_1 задачи (4.72)-(4.74) при $\Lambda = -3/2$, $D = 0.01$, $N = 4$ 110
- 4.4 Приближенное решение (4.79), $N = 5$, $\Lambda = -3/2$, $D = 0.01$ 112
- 4.5 Приближенное решение (4.80) при $N = 5$, $\Lambda = -3/2$, $D = 0.01$ 113

Приложение А

1. Параметр, изменение которого приводит к бифуркации, называется критическим параметром (бифуркационным параметром), а значение этого параметра, при котором происходит бифуркация, называется критическим значением.

2. Бифуркация Андронова-Хопфа — локальная бифуркация, в ходе которой от состояния равновесия динамической системы ответвляется периодическое решение (предельный цикл) при переходе пары комплексно-сопряженных собственных значений из спектра устойчивости через мнимую ось.

3. Медленно меняющиеся структуры — это решения, которые рождаются неустойчивыми, длительный промежуток времени сохраняют свою форму, а потом за очень короткий промежуток времени переходят на устойчивый режим. Так же определение можно найти в работах [116, 121].

4. Динамическая система [106] в полном метрическом пространстве H — это семейство отображений $\{S(t) : H \rightarrow H, t \geq 0\}$, такое что

- (i) для любого $t \geq 0$ отображение $S(t)$ непрерывно;
- (ii) для любого $x \in H$ отображение $t \mapsto S(t)x$ непрерывно;
- (iii) $S(0)$ — тождественное отображение;
- (iv) $S(t)(S(\tau)x) = S(t + \tau)x$ для всех $x \in H$ и $t, \tau \geq 0$.

5. Пусть $\{S(t); t \geq 0\}$ — динамическая система в H , тогда для любого $x \in H$ $\gamma(x) = \{S(t)x, t \geq 0\}$ — орбита точки x . Будем называть точку x стационарной, если $\gamma(x) = \{x\}$; орбиту $\gamma(x)$ назовем периодической, если существует такое $p > 0$, что $\gamma(x) = \{S(t)x, 0 \leq t \leq p\} \neq x$. [106]

6. Орбита $\gamma(x)$ (точка x) называется устойчивой, если равномерно по $t \geq 0$ выполняется соотношение $S(t)y \rightarrow S(t)x$ при $y \rightarrow x$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $t \geq 0$

$$\text{dist}(x, y) < \delta(\varepsilon), y \in H \Rightarrow \text{dist}(S(t)x, S(t)y) < \varepsilon.$$

Орбита $\gamma(x)$ неустойчива, если она не является устойчивой.

7. Орбита $\gamma(x)$ называется равномерно асимптотически устойчивой, если

она устойчива и, кроме того, существует окрестность $V = \{y \in H : \text{dist}(x, y) < r\}$, такая что

$$\text{dist}(S(t)y, S(t)x) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ равномерно по } y \in V.$$

8. Периодическое решение $x_0(t) = x_0(t+p)$ называется орбитально устойчивым, если множество $\Gamma = \{x_0(t), 0 \leq t \leq p\}$ устойчиво, т.е. для любой окрестности U множества Γ существует такая окрестность V этого множества, что если $x_1 \in V$, то решение $x(t, x_1) \in U$ при всех $t \geq 0$.

9. Множество $S \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ называется локальным инвариантным многообразием для дифференциального уравнения $dx/dt + Ax = f(t, x)$, если для любой пары $(t_0, x_0) \in S$ существует решение $x(\cdot)$ этого уравнения, определенное на некотором открытом интервале (t_1, t_2) , содержащем t_0 , и такое, что $x(t_0) = x_0$ и $(t, x(t)) \in S$ при $t_1 < t < t_2$.

Множество S называется инвариантным многообразием, если всегда можно взять $(t_1, t_2) = (-\infty, \infty)$.

Понятия, необходимые для постановки задачи Коши в банаховых пространствах (см. [3, 106]).

Рассматривается абстрактная задача Коши для нелинейного операторного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве H

$$u_t + Au = N(u), \quad u(0) = u_0.$$

Предполагается, что линейный оператор A с замкнутой в H областью определения $D(A)$, $\overline{D(A)}$, является самосопряженным в смысле теории неограниченных операторов в H , $A = A^*$, и положительно определенным, т.е. существует такое $c > 0$,

$$\langle Au, u \rangle_H \geq c \|u\|_H^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Через H_L^2 обозначается линейное пространство $D(A)$, снабженное скалярным произведением и соответствующей евклидовой нормой

$$\langle u, v \rangle_{H_L^2} = \langle Au, Av \rangle_H,$$

$$\|u\|_{H_A^2} = \langle u, u \rangle_{H_A^2}^{1/2}.$$

Тогда H_A^2 — гильбертово пространство, $A \in L(H_A^2 \rightarrow H)$, причем $\|A\|_{L(H_A^2 \rightarrow H)} = 1$. Тогда с помощью спектрального разложения определены степени A^α , $\alpha \geq 0$, и через H_A^1 будем обозначать область определения оператора $A^{1/2}$, $H_A^1 = D(A^{1/2})$, совпадающую с энергетическим пространством оператора A , $H_A^{-1} = (H_A^1)^*$ — сопряженное пространство. Из свойств спектрального разложения и теоремы Рисса в H вытекают плотность и непрерывность вложений

$$H_A^2 \hookrightarrow H_A^1 \hookrightarrow H \simeq H^* \hookrightarrow H_A^{-1}.$$

Оператор A , точнее, его энергетическое расширение на H_A^1 , можно рассматривать как линейный оператор из H_A^1 в H_A^{-1} , осуществляющий изоморфизм этих пространств,

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, v \rangle_{H_A^1}, \quad \langle Au, u \rangle = \|u\|_{H_A^1}^2, \quad \|u\|_H \leq \mu^{-1/2} \|u\|_{H_A^1} + \|u\|_{H_A^{-1}}, \quad \forall u, v \in H_A^1,$$

в то время как сам оператор A осуществляет изоморфизм H_A^2 на H . Кроме того, предполагается, что вложение $H_A^1 \hookrightarrow H$ компактно.

Будем использовать банаховы пространства функций $W^s(a, b)$ при $s = 1$ или $s = 2$. В силу теоремы о следах справедливы ограниченные вложения

$$W^1(a, b) \hookrightarrow C([a, b]; H), \quad W^2(a, b) \hookrightarrow C([a, b]; H_A^1),$$

причем

$$\max_{t \in [a, b]} \|u(t)\|_H \leq C_1 \|u\|_{W^1(a, b)}, \quad \max_{t \in [a, b]} \|u(t)\|_{H_A^1} \leq C_2 \|u\|_{W^2(a, b)}.$$

Введем замкнутое в пространстве $H^2(0, 2\pi)$ подпространство

$$H_*^2 = \{f \in H^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi), f'(0) = f'(2\pi)\},$$

2π — периодических по φ функций с нормой

$$\|u\|_{H_*^2} = (\|u\|_{L_2(0, 2\pi)}^2 + \|\partial_{\varphi\varphi}^2 u\|_{L_2(0, 2\pi)}^2)^{1/2},$$

эквивалентной обычной норме в $H^2(0, 2\pi)$.

Введем отрезок $\Omega = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $H_*^2(\Omega)$ — соболевское пространство 2π — периодических по φ функций с нормой

$$\|u\|_{H_*^2(\Omega)} = (\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\partial_{\varphi\varphi}^2 u\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

Отображение $v(\varphi) \rightarrow \cos v(-\varphi)$ является аналитическим по v из $H_*^2(\Omega)$ в $C(\Omega)$ на любом ограниченном в $H_*^2(\Omega)$ множестве.

Теорема о центральном многообразии

Основная ценность теоремы о центральном многообразии заключается в том, что, используя ее, можно свести бесконечномерную задачу к конечномерной. В случае конечномерной задачи можно свести исследование к задаче меньшего числа измерений. Для задачи о рождении цикла эта теорема позволяет редуцировать задачу к размерности 2 без потери какой-либо информации относительно устойчивости.

Теорема. Пусть Ψ — отображение, определенное в окрестности нуля в банаховом пространстве Z . Будем предполагать, что Ψ принадлежит классу C^{k+1} , $k \geq 1$ и $\Psi(0) = 0$. Предположим также, что $D\Psi(0)$ имеет спектральный радиус 1 и что спектр $D\Psi(0)$ расщепляется на две части: часть, лежащую на единичной окружности, и остаток, который находится на ненулевом расстоянии от единичной окружности. Обозначим через Y обобщенное собственное подпространство оператора $D\Psi(0)$, порожденное частью спектра, лежащей на единичной окружности; будем предполагать, что Y имеет размерность $d < \infty$.

Тогда существует окрестность нуля $V \subset Z$ и C^k — подмногообразие $M \subset V$ размерности d , проходящее через 0 и касающееся Y в точке 0, для которого выполнены следующие условия:

- 1) (локальная инвариантность): если $x \in M$ и $\Psi(x) \in V$, то $\Psi(x) \in M$;
- 2) (локальная устойчивость): если $\Psi^n(x) \in V$ для всех $n = 0, 1, \dots$, то при $n \rightarrow \infty$ расстояние между $\Psi^n(x) \in V$ и M стремится к нулю.